

Учебное издание

Гвоздев Александр Александрович
Огнев Игорь Сергеевич
Чистяков Михаил Валерьевич

Введение
в релятивистскую астрофизику
и современную космологию

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерная верстка И. С. Огнев

Подписано в печать 24.10.2013. Формат 60 × 84/16.
Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 5,0.
Тираж 54 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯргУ.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, М. В. Чистяков

Введение

в релятивистскую астрофизику

и современную космологию

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по направлению Физика

Ярославль
ЯргУ
2013

УДК 52:524.8(075.8)
ББК В632я73

Г25

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2013 года

Рецензенты:

Загупский А.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент;
Ученый совет ЯФ ФТПАН РАН

Гвоздев, Александр Александрович.

Г25 Введение в релятивистскую астрофизику и современную космологию : учебное пособие / А.А. Гвоздев, И.С. Огнев, М.В. Чистяков ; Ярослав. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2013. — 100 с.

ISBN 978-5-8397-0968-3

Настоящее пособие представляет краткий курс, освещающий базовые понятия и основные направления современной астрофизики и космологии. Подробно разбираются теории формирования и устойчивости плотных звезд, релятивистская кинетика и теории переноса излучения, современное состояние проблемы взрыва сверхновых с коллапсом центральной части.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 011200.62, 011200.68 Физика (дисциплины «Избранные вопросы космофизики», «Астрофизика», «Избранные вопросы релятивистской астрофизики», цикл Б3), очной формы обучения.

УДК 52:524.8(075.8)
ББК В632я73

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант, № 11-02-00394-а).

ISBN 978-5-8397-0968-3

© ЯрГУ, 2013

Оглавление

1 Особенности астрофизики и космологии	3
1.1 Способы наблюдения внеземных объектов	4
1.2 Единицы измерения, измерение расстояний	12
2 Теория формирования и устойчивости плотных звезд	25
2.1 Самогравитирующий газ	25
2.2 Гравитационная неустойчивость	28
2.3 Статистическая конфигурация	33
2.4 Решения политропного уравнения и его свойства	39
2.5 Свойства плотных звезд	42
3 Введение в релятивистскую кинетику	45
3.1 Релятивистское уравнение Больцмана	45
3.2 Кинетика и гидродинамика	51
4 Перенос излучения	55
4.1 Поле излучения	55
4.2 Уравнение переноса	63
4.3 Задача о монохроматическом рассеянии излучения	75
5 Нейтринные процессы в сверхновых с коллапсом центральной части	79
5.1 Сверхновые с коллапсом центральной части	79
5.2 Роль нейтрино в динамике взрыва сверхновой	79
5.3 Основные характеристики нейтринного излучения	86
5.4 Нейтринные динамические эффекты при магнитотропационном взрыве сверхновой	90

- [12] Bethe H. A., Wilson J. R. Revival of a stalled supernova shock by neutrino heating // *The Astrophysical Journal*. 1985. Vol. 295. P. 14–23.
- [13] Kifonidis K., Plewa T., Janka H. T., Mueller E. Non-spherical core collapse supernovae. I: Neutrino-driven convection, Rayleigh-Taylor instabilities, and the formation and propagation of metal clumps // *Astronomy and Astrophysics*. 2003. Vol. 408. P. 621–649.
- [14] Janka H.-T., Hanke F., Hudepohl L. et al. Core-collapse supernovae: Reflections and directions // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2012. no. 1. P. 01A309.
- [15] Чугай Н. Н. Спиральность нейтрино и пространственные скорости пульсаров // Письма в *Астрономический журнал*. 1984. Т. 10. С. 210–213.
- [16] Нагирнер Д. Лекции по теории переноса излучения. СПб., 2001. С. 284.
- [17] Засов А., Постнов К. Общая астрофизика. Фрязино: Век 2, 2006. С. 496.
- [18] Соболев В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. С. 392.
- [19] Соболев В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука, 1985. С. 504.
- [20] Михалас Д. Звездные атмосферы. Т. 1. М.: Мир, 1982. С. 352.

1 Особенности астрофизики и космологии

В настоящее время астрофизика и космология являются бурно развивающимися направлениями современной физики. В первую очередь это связано с выводом в космос приборов, изучающих внеземные объекты, что позволило получить о них существенно более точную и достоверную информацию, поскольку прохождение излучения через атмосферу может искажать его характеристики. Кроме того, увеличилось количество таких приборов и их чувствительность, что привело к тому, что сейчас теоретическая астрофизика явно отстает от огромного потока наблюдательных данных, получаемых по внеземным объектам.

Под астрофизикой обычно понимается направление, занимающееся исследованием внеземных объектов и явлений с помощью открытых на Земле физических законов. Космология ставит перед собой куда более далеко идущую цель — изучение строения и эволюции Вселенной в целом. Оба эти направления постулируют, что в других частях Вселенной применимы законы физики, открытые на Земле. На самом деле, данный факт постоянно проверяется с помощью разных независимых методов, причем внутри Солнечной системы этот факт можно считать практически подтвержденным. Отметим, что только такой подход, основанный на единстве законов физики во всей Вселенной, позволяет изучать физические методами объекты, с которыми мы не можем иметь непосредственного контакта для проведения над ними эксперимента. Поэтому основным методом теоретической астрофизики и космологии является моделирование. Суть этого метода состоит в том, что в рамках некоторой модели на основе известных физических законов предсказываются наблюдаемые проявления изучаемых объектов. Затем эти предсказания проверяются наблюдениями, которые могут либо подтвердить, либо опровергнуть предложенную модель.

Другой отличительной особенностью астрофизики и космологии является то, что типичные времена изменения астрофизических объектов слишком велики по сравнению с возможным временем их наблюдения. Казалось бы, это делает невозможным изучение эволюции астрофизических объектов. Однако это не так, потому что наблюдению, как правило, доступно сразу большое количество однотипных объектов разных возрастов. С одной стороны, это связано с тем, что вблизи нас такие объекты могут рождаться постоянно на протяжении продолжительного времени. С другой стороны, от удаленных объектов свет идет к нам

допное время. Поэтому если во Вселенной в одно и то же время образовались некоторые объекты, то более удаленные из них мы будем наблюдать на более раннем этапе развития. Однако при таком подходе к изучению эволюции астрофизических объектов следует иметь некоторую осторожность. Это связано с тем, что детали рождения и развития объектов, которые образуются на различных этапах эволюции Вселенной, могут существенно отличаться. Так, например, звезды первого поколения (самые ранние звезды, формировавшиеся из вещества еще необогащенного тяжелыми элементами) вследствие малой металличности могли иметь существенно большие массы и эволюционировали быстрее, чем, например, звезды третьего поколения, обилие тяжелых элементов в которых близко к солнечному.

Еще одной особенностью астрофизики и космологии является существенная роль эффектов селекции. Под селекцией в астрофизике понимается то, что зачастую мы видим не самые распространенные объекты данного типа, а тех его представителей, которых легче всего наблюдать. Так, например, долгое время радиопульсары, которые являются очень яркими периодическими радиисточниками, считались единственными представителями нейтронных звезд. Однако открытия последних пятнадцати лет показали, что это не так, а их выделенная роль была связана с тем, что такие источники легче обнаруживать. И хотя на настоящее время из известных более чем двух тысяч одиночных нейтронных звезд подавляющее число составляют именно радиопульсары, но реальная их доля в популяции существенно меньше.

1.1 Способы наблюдения внеземных объектов

Как отмечалось выше, в астрофизике и космологии отсутствует непосредственный контакт с предметом исследования. Поэтому единственный способ получения сведений о внеземных объектах — это их наблюдение. С незапамятных времен этим занимались еще астрономия, однако такое наблюдение позволяло лишь предсказывать перемещения звезд и планет по небесной сфере, но ничего не могло сказать об их строении и эволюции. Качественный перелом произошел в конце XIX века с появлением спектрального анализа, дающего возможность исследовать химический состав и физическое состояние (температуру, концентрацию компонент и др.) источника света. Применение этого метода к звездам показало, что все они состоят из известных на Земле элементов, а их

Список литературы

- [1] Neufu R. C. Diffuse Background Radiation // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 516, no. 2. P. L49–L52.
- [2] Giacomelli G., Siofi M. Astroparticle Physics // arXiv:hep-ex/0211035. 2002. P. 56.
- [3] Aloisio R. Ultra High Energy Particles Propagation and the Transition from Galactic to Extra-Galactic Cosmic Rays // arXiv:1207.2089. 2012. P. 6.
- [4] Бисноватый-Коган Г. С. Релятивистская астрофизика и физическая космология. М.: КРАСАНД, 2011. С. 376.
- [5] Шапиро С. Л., Тьюколки С. А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. 2. / под ред. Я. А. Смординский. М.: Мир, 1985. Т. 2. С. 257–656.
- [6] Имшенник В. С., Надеждин Д. К. Сверхновая 1987A в Большом Магеллановом Облаке: наблюдения и теории // УФН. 1988. Т. 156. С. 561–651.
- [7] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория титотения и эволюция звезд / под ред. Л. М. Озерной. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. С. 484.
- [8] Raffelt G. G. Stars as Laboratories for Fundamental Physics, 1996. Chicago: University of Chicago Press, 1996. P. 686.
- [9] Colgate S. A., Johnson M. H. Neutrondipanic origin of cosmic rays // Physical Review Letters. 1960. Vol. 5. P. 235–239.
- [10] Bethe H. A. Supernova mechanisms // Reviews of Modern Physics. 1990. Vol. 62. P. 801–866.
- [11] Попов С. В. Магнито-вращательная эволюция и популяционный синтез одиночных нейтронных звезд: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2011. С. 353.

Поскольку при первичном полоидальном магнитном поле напряженности $B \gtrsim 10^{13}$ Гс это время не превышает времени основного нейтринного излучения, рассматриваемый эффект может стать важным фактором, способным существенно повлиять на дальнейшую эволюцию сверхновой. Заметим, что силовые линии вторичного тороидального магнитного поля в разных полусферах направлены в противоположные стороны [4]. Таким образом, дополнительная нейтринная раскрутка будет прецессионно вращать дальнейшему росту магнитного поля в одном из полушарий, тогда как в другом — усиливать его генерацию. Так как в магнитоторсионной модели взрыв происходит при достижении магнитным полем некоторого критического значения, то подавление роста магнитного поля в одном из полушарий должно порождать односторонний взрыв сверхновой. Такой несимметричный взрыв являлся бы естественным источником сильного ускорения центрального остатка сверхновой, что позволило бы объяснить аномально большие линейные скорости, наблюдаемые у некоторых пульсаров [11]. Отметим, что односторонний взрыв сверхновой может происходить и в том случае, когда первичное магнитное поле содержит еще и тороидальную компоненту, причем с силовыми линиями, направленными в одну сторону в обоих полушариях [4]. Однако наличие такого поля означает изначальное нарушение зеркальной симметрии в предсверхновой, источник которого непонятен. Нарушение же такой симметрии в сверхновой за счет взаимодействия нейтрино со средой представляется более естественным объяснением одностороннего взрыва.

Вопросы для самоконтроля

1. Что является причиной взрыва звезды как сверхновой? Какие физические условия этому соответствуют?
2. Перечислите основные стадии взрыва сверхновой с коллапсом центральной части.
3. Какие нейтринные процессы являются наиболее важными на каждой из стадий взрыва сверхновой? К чему они приводят?
4. Назовите макроскопические проявления взаимодействия нейтрино с оболочкой сверхновой.

физика подчиняется тем же законам. Это дало сильный толчок для исследования внеземных объектов на качественно новом уровне. В настоящее время спектральные методы являются одними из самых мощных наблюдательных инструментов в астрофизике и космологии, так как позволяют не только определять химический состав источника и его физические параметры, но и рассчитывать расстояние до удаленных объектов по смещению его спектральных линий. Для близких источников с помощью этого метода иногда удается получить распределение лучевых скоростей по объекту, что позволяет определить скорости внутренних движений и общую массу источника.

Дальнейшее развитие экспериментальных методов в астрофизике и космологии было связано с выходом наблюдений за оптический световой диапазон. Расширение наблюдаемого спектра сначала за счет радиодиапазона (конец 30-х годов XX в.), а затем (60–80-е годы XX в.) за счет инфракрасного, ультрафиолетового, рентгеновского и гамма-диапазонов, позволило получить об исследуемых объектах куда более полную информацию. Дальнейшим этапом стал вывод этих приборов в космос, что дало возможность избавиться от влияния земной атмосферы на регистрируемое излучение и сделать получаемую информацию более достоверной и качественной. На рисунке 1 приводится усредненный электромагнитный спектр Вселенной, принимаемый на Земле. Как видно из графика, существующий вклад в него дает реликтовое излучение (левый пик). Следующий пик имеет галактическое происхождение и связан в основном с излучением газопылевых облаков. Третий пик приходится на рентгеновскую область и гамма-диапазон. Он обусловлен очень горячими и взрывающимися объектами как нашей, так и других галактик.

Кроме ставшего уже традиционным способа изучения внеземных объектов по регистрации от них фотонного излучения в разных диапазонах энергии, информация о них может быть получена также детектированием и других частиц, например нейтрино. Как известно, нейтрино участвуют лишь в слабом и гравитационном взаимодействии, поэтому они очень плохо взаимодействуют с веществом. Например, для солнечных нейтрино Земля и большинство звезд являются прозрачными, так как длина свободного пробега нейтрино в этих объектах существенно превышает их размеры. Такая большая проникающая способность нейтрино создает серьезные технические проблемы при их регистрации, и именно поэтому нейтринные телескопы представляют из себя огромные установки, включающие в себя тонны специального вещества (воды, льда

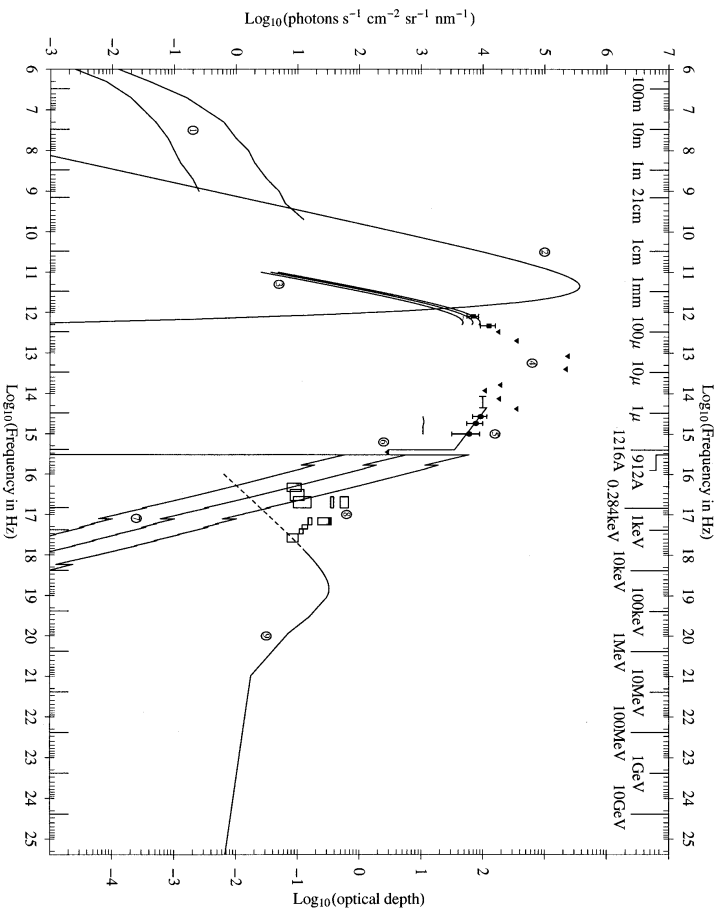


Рис. 1. Спектр фонового излучения Вселенной в фотонах. По вертикальной оси отложена интенсивность излучения в югериформической шкале (число фотонов, приходящих за секунду на квадратный сантиметр поверхности из телесного угла стерadians в полосе нанометр), по горизонтальной оси, тоже в югериформическом масштабе, частота, длина волны и энергии фотонов. Отдельные вклады в спектр слева направо: (1) радиоизлучение (рассеяние электронов на ионах и синхротронное излучение частично ионизованного диска Галактики), (2) реликтовый фон (чернотельное излучение с температурой $T \simeq 2.7$ K), (3) субмиллиметровый диапазон (реликтовое излучение, рассеянное на горячих электронах межзвёздного и межгалактического газа), (4) инфракрасное излучение (газовыделыве облака Галактики), (5), (6) видимый диапазон (звёзды Галактики), (7) ультрафиолетовый диапазон (почти вертикальная кривая соответствует спектральной линии водорода $L_{H\alpha}$, излучаемой ионизованными межгалактическими облаками водорода с разными красными смещениями), (8) коротковолновая ультрафиолетовая область (излучение горячей межзвёздной плазмы за счет фотоионизации, разные линии соответствуют разной плотности водорода), (9) прямуютольнички) пик в рентгеновском диапазоне (аккреционные диски вокруг нейтронных звезд и черных дыр, горячий межгалактический газ), (9) γ -диапазон (ядра и диск галактики). Взято из работы [1]

которого может быть магнитное поле предсверхновой, усиленное быстрым сжатием коллапсирующего ядра. В этом случае при дифференциальном вращении оболочки, которое также является следствием быстрого сжатия предсверхновой, в ней генерируется вторичное торoidalное магнитное поле, напряженность которого линейно растет по времени [4]:

$$B_\varphi = \Omega_0 B_0 F(r, \theta) \Delta t, \quad (310)$$

где B_0 – напряженность первичного poloidalного магнитного поля на полюсе, Ω_0 – начальная угловая скорость вращения центрального остатка, $F(r, \theta)$ – функция, зависящая от градиента угловых скоростей в оболочке и конфигурации первичного магнитного поля. Источником энергии для генерации вторичного магнитного поля является энергия вращения центральной части остатка. Таким образом, за времена

$$\Delta t \simeq 3 \text{ сек} \left(\frac{10^{13} \text{ Гс}}{B_0} \right) \quad (311)$$

основная часть энергии вращения переходит в магнитное поле, а его напряженность достигает максимального значения

$$B_\varphi^{(max)} \simeq 3 \cdot 10^{13} \text{ Гс} \left(\frac{\Omega_0}{1 \text{ сек}} \right), \quad (312)$$

и дальнейший его рост прекращается. Как видно из приведенных выражений, при первичном магнитном поле $B_0 \simeq 10^{13} \text{ Гс}$, вторичное торoidalное магнитное поле успевает существенно усиливаться за характерное время основного нейтринного излучения, которое составляет несколько секунд. Заметим, что для миллисекундных остатков сверхновых его напряженность может достигать значений $B_\varphi^{(max)} \sim 10^{17} \text{ Гс}$. Так как это магнитное поле имеет торoidalную конфигурацию, то переизлучения нейтрино в этой части оболочки будет приводить к ее дополнительному торможению либо раскрутке. При этом угловое ускорение, так же как и магнитное поле, будет расти линейно по времени:

$$\dot{\Omega} \simeq 0.1 \text{ сек}^{-2} \left((\Omega_0 t) F(r, \theta) \frac{B_0}{10^{13} \text{ Гс}} \right). \quad (313)$$

Время, за которое это дополнительное ускорение изменит угловую скорость вращения оболочки на величину Ω_0 , а значит, сможет существенно повлиять на ее динамику, составляет:

$$\tau \sim 4 \text{ сек} \sqrt{\frac{10^{13} \text{ Гс}}{B_0}}. \quad (314)$$

В ультрарелятивистском пределе коэффициенты абсорбции нейтрино и антинейтрино в этом случае будут даваться следующим выражением:

$$K_{\nu}^0 = \frac{G^2}{\pi} N_n (1 + 3g_a^2) \frac{\omega^2 e^{(\omega - \mu_e)/T}}{e^{(\omega - \mu_e)/T} + 1}, \quad (306)$$

$$K_{\bar{\nu}}^0 = \frac{G^2}{\pi} N_n (1 + 3g_a^2) \frac{\omega^2 e^{(\omega + \delta\mu)/T}}{e^{(\omega + \mu_e)/T} + 1}. \quad (307)$$

Как видно из приведенных для коэффициента абсорбции выражений, переход к случаю без магнитного поля осуществляется эффективной заменой $eB \rightarrow 2\omega^2$ и отбрасыванием асимметричной части, связанной с $\cos \beta$.

Импульс, передаваемый в поперечном направлении (291), хотя и является маленьким по сравнению с радиальным, однако может оказывать существенное влияние на динамику сверхновой, так как он не компенсируется гравитационным притяжением. При типичных нейтринных параметрах в условиях взрыва сверхновой поперечная составляющая силы в URCA-процессах (264) и (265), а также реакции рассеяния нейтрино на нуклонах среды (255) может быть представлена в следующем виде:

$$\mathfrak{S}_{\perp}^{(URCA)} \simeq 3.3 \cdot 10^{20} \text{ дин/см}^3 \left(b_3 \rho_{12} b_{\perp} \left(\frac{T}{3.7 \text{ МэВ}} \right)^4 \frac{\langle \chi_{\nu_e \bar{\nu}_e}^2 \rangle - 1/3}{0.057} \right), \quad (308)$$

$$\mathfrak{S}_{\perp}^{(sc)} \simeq 2.7 \cdot 10^{20} \text{ дин/см}^3 \left(b_3 \rho_{12} b_{\perp} \frac{3.7 \text{ МэВ}}{T} \frac{N_{\nu}}{2.6 \cdot 10^{32} \text{ г/см}^3} \frac{\langle \chi_{\nu}^2 \rangle - 1/3}{0.057} \right), \quad (309)$$

где оставлена зависимость лишь от меняющихся с расстоянием параметров. Как видно из приведенных выражений, поперечный импульс, передаваемый среде в прямых URCA-процессах и реакциях рассеяния, одного порядка и направлен в одну сторону — по направлению поперечной составляющей магнитного поля. Таким образом, вклады от этих процессов не компенсируют друг друга.

Так как конфигурация магнитного поля качественно не влияет на следующие выше выводы, а лишь уменьшает передаваемый поперек радиального направления импульс на величину b_{\perp} , то для дальнейшего рассмотрения удобно считать его тороидальным. Такая конфигурация, в частности, может возникнуть в случае, когда остаток коллапса обладает первичным полоидальным магнитным полем, естественным источником

или сцинтиллятора), с которым и происходит взаимодействие нейтрино. Однако большая проникающая способность нейтрино не только создает трудности при их регистрации. Это же позволяет им свободно излучаться из плотных и горячих областей, существенно непрозрачных для других видов частиц. Например, нейтрино свободно выходят из ядра Солнца, тогда как фотоны имеют там длину свободного пробега, не превышающую сантиметра. Таким образом, регистрация нейтрино позволяет получать информацию о внутренних частях астрофизических объектов, недоступных для изучения с помощью фотонной астрономии. Детектируемые нейтрино обычно подразделяются по источникам, в которых они рождаются.

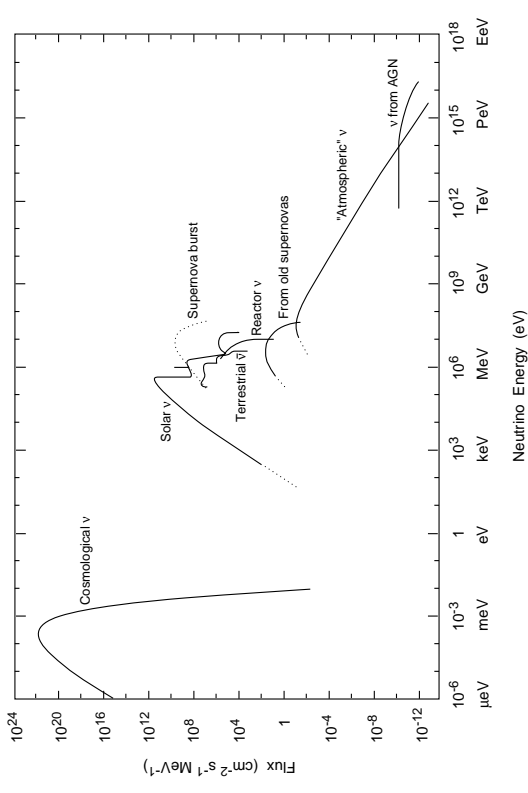


Рис. 2. Ожидаемая интенсивность потока нейтрино от различных источников: реликтовые, солнечные, земные, реакторные, атмосферные, от сверхновых и активных галактических ядер. (Взято из работы [2])

На рисунке 2 приводится примерный спектр нейтрино и их источники. Как видно из графика, наиболее интенсивный поток соответствует реликтовым нейтрино. Происхождение этих нейтрино аналогично происхождению реликтовых фотонов. На масштабе температур $T \sim 2.5$ МэВ ($t \sim 0.1$ с) нейтрино стали слабо взаимодействовать с веществом (для реликтовых фотонов это произошло при $T \sim 0.3$ эВ ($t \sim 400$ тыс. лет)) и далее лишь остывали за счет расширения Вселенной. Так как реликто-

вые нейтрино раньше перестали взаимодействовать с веществом, то их сегодняшняя температура должна быть меньше температуры реликтового излучения. К сожалению, роль реликтовых нейтрино в современной Вселенной невелика, а их экспериментальное обнаружение вряд ли будет возможно в ближайшее время. Однако в ранней Вселенной они существенно влияли на темп ее расширения и на ход первичного нуклеосинтеза. Поэтому их существование косвенно подтверждается теоретическими моделями и не вызывает сомнения в настоящее время. Следующими по энергии идут солнечные нейтрино, источником которых являются термодерные реакции внутри Солнца. Отметим, что наблюдение именно солнечных нейтрино впервые позволило доказать наличие у нейтрино массы. Далее, достаточно близко по энергии к солнечным нейтрино стоят реакторные и геонейтрино. Как понятно из названия, первые из них имеют техногенную природу и рождаются в ядерных реакторах, тогда как источником геонейтрино являются распады радиоактивных изотопов в недрах Земли. Сюда же можно было отнести ускорительные нейтрино, которые рождаются в ускорителях частиц, однако их вклад в общую интенсивность достаточно мал. Отметим, что реакторные и ускорительные нейтрино не играют никакой роли в астрофизике, однако очень важны для наземных экспериментов, изучающих свойства нейтрино. Геонейтрино из-за слабости потока пока тоже не могут дать существенной информации о внутренних частях Земли, но, как показывают различные модели, они играют существенную роль в ее тепловом балансе. Далее по энергии следуют нейтрино от коллапса массивных звезд. На конечной стадии эволюции звезд с массой $M \gtrsim 10 M_\odot$ происходит коллапс их железного ядра, который приводит к нейтронизации вещества и короткому нейтринному всплеску (supernova burst на рис. 2). Затем остаток коллапса остывает за счет излучения нейтрино в течение примерно 10 секунд. Такой спектр близок к чернотельному и имеет характерную температуру $T \sim 10$ МэВ (from old supernova на рис. 2). Отметим, что чувствительность современных нейтринных телескопов позволяет детектировать поток нейтрино от сверхновой, если он произойдет в нашей галактике. Одним из наиболее известных кандидатов на такое событие является красный сверхгигант Бетельгейзе, который, по оценкам, может взорваться как сверхновая в любое время в течение нескольких следующих тысяч лет. Далее протяженную часть спектра занимают атмосферные нейтрино. Источниками этих нейтрино являются космические лучи, которые взаимодействуют с ядрами воздуха в атмосфере Земли. Примерно на

где суммирование ведется по фазовому объему dn_ν конечного нейтрино. Здесь $\delta\mu = \mu_e + \mu_p - \mu_n$, причем знак плюс при $\delta\mu$ соответствует процессам с нейтрино, а знак минус — реакциям с антинейтрино, μ_e , μ_p и μ_n — химические потенциалы электрона, протона и нейтрона соответственно. В выбранной системе отсчета, где магнитное поле направлено по трети оси, элементы фазового объема для участвующих в URCA-процессах частиц могут быть записаны в виде:

$$dn_e = \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} dr_2 dr_3, \quad (300)$$

$$dn_p = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{j=0}^{\infty} s_j(\sigma) \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} dR_2 dR_3, \quad (301)$$

$$dn_n = \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p', \quad (302)$$

$$dn_\nu = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 k, \quad (303)$$

где $s_j(\sigma) = 0$ для случая $j = 0$, $\sigma = -1$, и $s_n(\sigma) = 1$ для всех остальных случаев. Функция $s_j(\sigma)$ характеризует тот факт, что заряженная частица на нулевом уровне Ландау может иметь лишь одну поляризацию (зависящую от знака ее заряда).

В ультрарелятивистском случае выражение для коэффициента абсорбции в данных реакциях дается следующими выражениями:

$$K_1 = K_\nu = \frac{G^2}{2\pi} e B N_n \left((1 + 3g_a^2) + (1 - g_a^2) \cos \beta \right) \frac{e^{(\omega - \mu_e)/T}}{e^{(\omega - \mu_e)/T} + 1}, \quad (304)$$

$$K_2 = K_{\bar{\nu}} = \frac{G^2}{2\pi} e B N_n \left((1 + 3g_a^2) + (1 - g_a^2) \cos \beta \right) \frac{e^{(\omega + \delta\mu)/T}}{e^{(\omega + \mu_e)/T} + 1}, \quad (305)$$

и имеет смысл полного коэффициента абсорбции для нейтрино и антинейтрино соответственно. Здесь β — угол между вектором напряженности магнитного поля и импульсом нейтрино, $\delta\mu = \mu_e + \mu_p - \mu_n$ и характеризует отклонение химического состава среды от β -равновесного. В целях общности изложения, приведем аналогичные величины в случае отсутствия магнитного поля. Кроме того, их анализ позволяет выявить, как именно сильное магнитное поле влияет на рассматриваемые процессы.

средняя длина свободного пробега нейтрино в данном процессе, характеризующая масштаб расстояний, которое нейтрино проходит не взаимодействуя:

$$\bar{\ell}_\nu = \frac{N_\nu}{\Gamma_\nu}, \quad (293)$$

где N_ν — локальная концентрация нейтрино, Γ_ν — скорость соответствующей реакции поглощения нейтрино.

Величины (291) и (292) для прямых URCA-процессов (264)–(265) удобно вычислять, используя так называемый коэффициент абсорбции:

$$\mathcal{K} = \sum_{i \neq \nu, f} \frac{|S_{if}|^2}{T} \prod_{i, f} f_i (1 - f_f) dn_i dn_f, \quad (294)$$

где суммирование идет по всем начальным, кроме нейтринного, и конечным состояниям. Заметим, что эта величина определяется (как следует из названия) для процессов, где нейтрино находится в начальном состоянии и характеризует скорость поглощения средней нейтрино с заданным 4-импульсом.

Используя коэффициент абсорбции, можно легко получить скорость реакции и переданную в ней энергию и импульс. В случае процессов с поглощением нейтрино непосредственно из определения \mathcal{K} получаем:

$$\frac{d\mathcal{P}_\alpha^{(abs)}}{dt} = \frac{1}{V} \sum_{i=\nu} \mathcal{K} k_\alpha f_\nu(\omega) dn_\nu, \quad (295)$$

$$\Gamma^{(abs)} = \frac{1}{V} \sum_{i=\nu} \mathcal{K} f_\nu(\omega) dn_\nu, \quad (296)$$

где суммирование ведется по фазовому объему dn_ν начального нейтрино. Здесь k_α — 4-импульс нейтрино, ω — его энергия, f_ν — функция распределения нейтрино. Воспользовавшись соотношением

$$1 - f_i(E_i) = \exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) f_i(E_i) \quad (297)$$

и законом сохранения энергии, можно получить:

$$\frac{d\mathcal{P}_\alpha^{(em)}}{dt} = -\frac{1}{V} \sum_{f=\nu} \mathcal{K} k_\alpha e^{(\pm\delta\mu-\omega)/T} (1 - f_\nu(\omega)) dn_\nu, \quad (298)$$

$$\Gamma^{(em)} = \frac{1}{V} \sum_{f=\nu} \mathcal{K} e^{(\pm\delta\mu-\omega)/T} (1 - f_\nu(\omega)) dn_\nu, \quad (299)$$

масштабе энергий $E \sim 10^{14}$ эВ в общем спектре начинают доминировать нейтрино космического происхождения, которые называют космические нейтрино высоких энергий. Их источником являются активные ядра галактик, в джетах которых происходит эффективное ускорение протонов и электронов на ударных волнах. Взаимодействие ускоренных протонов с фотонами приводит к рождению π -мезонов, которые могут распадаться на высокоэнергичные фотоны и нейтрино. Именно эти нейтрино и наблюдаются как космические. Отметим, что менее энергичные космические нейтрино аналогичным образом могут рождаться в оболочках сверхновых и в γ -всплесках, однако в этом диапазоне энергий их вклад в общую интенсивность существенно меньше, чем вклад атмосферных нейтрино.

Другим важным источником информации об астрофизических объектах является детектирование от них потоков высокоэнергичных частиц, получивших название космические лучи. К ним относятся заряженные частицы, такие как протоны, ядра более тяжелых элементов и электроны. Отличительной особенностью космических лучей является их огромная энергия. Она существенно превосходит тепловую энергию фотонов и даже нейтрино, излучающихся этими же источниками. Таким образом, потоки высокоэнергичных частиц должны рождаться во внешних областях астрофизических объектов, где возможны механизмы эффективного ускорения заряженных частиц. В частности, такое ускорение возможно, например, на фронте ударной волны (так называемый механизм ускорения Ферми) или в сильных электрических полях, существующих в радиопульсарах. Следовательно, детектирование космических лучей позволяет получать информацию о нестационарных явлениях во внешних областях астрофизических объектов. Усредненный спектр космических лучей приводится на рисунке 3. Отметим, что на графике не приведена низкоэнергетическая составляющая космических лучей. К ней относятся солнечные космические лучи, ускорение которых происходит во вспышечных процессах на Солнце. А также аномальные космические лучи, образующиеся в солнечной системе на периферии гелиомагнитосферы. Высокоэнергичная часть спектра делится на космические лучи галактического происхождения, энергия которых достигает значения $E \sim 10^9$ ГэВ, и космические лучи внегалактического происхождения, минимальная энергия которых составляет $E \sim 10^6$ ГэВ. Как видно из графика, внегалактические космические лучи имеют характерный завал интенсивности на масштабе $E \sim 10^{11}$ ГэВ. Этот завал связан с пределом Грайзена—Зацепина—Кузьмина, суть которого состоит в том,

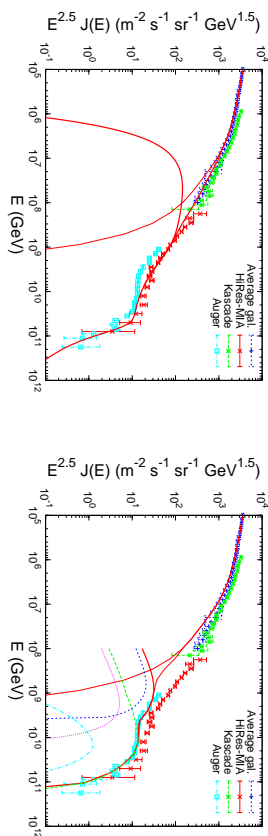


Рис. 3. Усредненный спектр космических лучей. Наблюдательные данные (точки) и их приближения (линии), полученные с помощью разных моделей источников внегалактических космических лучей и их химического состава. (Взято из работы [3])

что внегалактические протоны, имеющие энергию более $E \sim 5 \cdot 10^{10}$ ГэВ, будут эффективно терять ее из-за взаимодействия с фотонами реликтового излучения.

Существует еще один принципиальный способ получения информации об астрофизических объектах — детектирование от них гравитационных волн. И хотя пока прямой регистрации гравитационных волн не произошло, но есть косвенные подтверждения их существования. Кроме того, уже работающие детекторы имеют достаточно чувствительность, чтобы зарегистрировать гравитационные волны от слияния в тесной двойной системе, либо от взрыва сверхновой, если эти события произойдут в нашей галактике. Таким образом, есть надежда, что прямая регистрация гравитационных волн может произойти в ближайшем будущем.

Как было описано выше, основными способами получения информации об астрофизических объектах на настоящее время является регистрация от них фотонов, нейтрино и космических лучей. Детектирование гравитационных волн пока остается лишь теоретической возможностью. Однако даже их отсутствие, позволяет получать ограничения на физические параметры систем, от которых они ожидалось, но не были обнаружены. Сводная информация по основным видам частиц, регистрируемых в астрофизике, и их источникам приведена в таблице (1). В эту таблицу не были включены гравитационные волны, однако отметим, что на настоящее время наиболее интересными кандидатами на их регистрацию являются процессы слияния нейтронных звезд и черных дыр в тесных двойных системах.

полнительный надрыв обогатит сверхновой. Однако, кроме стандартной роли дополнительного источника энергии, взаимодействие нейтрино с веществом в присутствии магнитного поля приводит к новому динамическому эффекту, идея которого принадлежит Н. Н. Чугаю [15]. Известно, что в процессах с участием нейтрино нарушается пространственная четность. В макроскопическом масштабе эффект нарушения пространственной четности проявляется в дополнительном импульсе, переданном нейтрино от элемента объема среды вдоль вектора напряженности магнитного поля.

Важно отметить, что при вычислении избыточного импульса локальные значения температуры и химических потенциалов частиц элемента среды обогатились должны определяться самосогласованно с интенсивностью процессов переизлучения нейтрино в нем. Решение этой задачи важно для моделирования магниторотационного взрыва сверхновой, поскольку позволяет корректно оценить как нейтринные динамические эффекты, так и их влияние на генерацию магнитного поля во внутренней плотной оболочке сверхновой.

Выражения для 4-импульса, передаваемого от нейтрино единице объема среды в единицу времени в одном процессе, определяется как:

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \left(\frac{dQ}{dt}, \frac{d\vec{P}}{dt} \right) = \frac{1}{V} \sum_{i,f} q_\alpha \frac{|S_{if}|^2}{\tau} \prod_{i,f} f_i(1-f_f) dn_i dn_f, \quad (291)$$

где суммирование ведется по фазовому объему всех начальных (i) и конечных (f) частиц. Здесь $|S_{if}|^2/\tau$ — квадрат S-матричного элемента процесса в единицу времени, q_α — 4-импульс, переданный среде в данной реакции (для прямых URCA-процессов он совпадает с импульсом нейтрино с учетом знака), f_i, f_f — функции распределения начальных и конечных частиц соответственно, dn_i, dn_f — элементы их фазового объема. Другой важной интегральной величиной, характеризующей процесс, является скорость реакции Γ , определяемая как:

$$\Gamma = \frac{1}{V} \sum_{i,f} \frac{|S_{if}|^2}{\tau} \prod_{i,f} f_i(1-f_f) dn_i dn_f, \quad (292)$$

и имеющая смысл числа переходов в данной реакции ($i \rightarrow f$), происходящих в единице объема вещества в единицу времени. С помощью нее могут быть получены и другие важные величины, характеризующие данный процесс. В частности, из скорости реакции может быть получена

5.4 Нейтринные динамические эффекты при магниторотационном взрыве сверхновой

Моделирование взрыва сверхновой с учётом магнитного поля имеет довольно долгую историю. Впервые такая модель, получившая впоследствии название магниторотационной, была предложена Бисноватом-Коганом в 1970 году [4] и развивается до настоящего времени. Первые расчёты с самосогласованным решением уравнений магнито-гидродинамики (МГД) проводились для одномерной модели. В рамках этой модели была получена следующая картина взрыва сверхновой. При наличии первичного полоидального магнитного поля в остатке коллапса и дифференциальном вращении его оболочки с градиентом угловых скоростей в ней возникает вторичное тороидальное магнитное поле, энергетическим источником которого является вращение центральной части остатка. Это магнитное поле линейно растёт по времени, и при достижении некоторого критического значения $B \sim 10^{16}$ Гс происходит взрыв. Время достижении этого критического значения зависит от напряжённости первичного магнитного поля. Причем, как показал детальный одномерный расчет, взрыв может быть сильно затянут по сравнению с аналогичными моделями, не учитывающими магнитное поле.

Однако недавние двумерные расчеты в рамках магниторотационной модели привели к качественно новому сценарию развития взрыва [4]. Как было показано, линейный рост тороидальной компоненты магнитного поля нарушается развитием магниторотационной неустойчивости, вследствие чего происходит очень быстрое увеличение всех компонент магнитного поля. Это приводит к прямому (без задержки ударной волны) сильно несимметричному взрыву сверхновой. Отметим, что в области развития неустойчивости напряженность магнитного поля достигает значений $B \sim 10^{16}$ Гс. Аналогичные результаты были получены и в других, менее разработанных, моделях с развитием различных типов МГД неустойчивостей.

Наличие сильного магнитного поля с напряженностью $B \sim 10^{16}$ Гс в остатке коллапса приводит к существенной модификации распространения нейтринного потока в такой среде. Поскольку нейтрино уносят в первые секунды после коллапса огромную энергию $E_\nu \sim 10^{53}$ эрг, правильный учет их взаимодействия с веществом остатка является необходимым для самосогласованного описания взрыва сверхновой. Одним из наиболее известных проявлений такого взаимодействия является до-

Таблица 1
Свойства частиц, регистрируемых от астрофизических источников

Частицы	Диапазон энергий	Основные источники
Фотоны (радиодиапазон)	$\lesssim (0.6-1.2)$ мэВ $\gtrsim (1-2)$ мм	Реликтовое излучение, ядра галактик, молекулярные облака, радиопульсары.
Фотоны (инфракрасные)	$(0.6-1.2)$ мэВ – 1.7 эВ $(1-2)$ мм – 0.74 мкм	Космическая пыль, протозвезды, экзопланеты, тела Солнечной системы.
Фотоны (видимый диапазон)	1.7 эВ – 3.3 эВ 740 нм – 380 нм	Ядра галактик, межзвездный газ, звезды и Солнце, тела Солнечной системы.
Фотоны (ультрафиолетовые)	3.3 эВ – 124 эВ 380 нм – 10 нм	Межзвездная среда, молодые горячие звезды, Солнце.
Фотоны (рентгеновские)	124 эВ – 124 кэВ 10 нм – 0.01 нм	Межгалактический газ, аккреционные диски, ядра галактик, Солнце.
Фотоны (γ -излучение)	> 124 кэВ < 0.01 нм	Ядра галактик, радиопульсары, сверхновые.
Нейтрино (солнечные)	100 кэВ – 10 МэВ	Солнце.
Нейтрино (космические)	10 МэВ – 10^{12} МэВ	Ядра галактик, гамма-всплески, сверхновые.
Космические лучи (солнечные)	0.1 МэВ – $2 \cdot 10^4$ МэВ	Солнце.
Космические лучи (галактические)	$2 \cdot 10^4$ МэВ – 10^{12} МэВ	Пульсары, сверхновые.
Космические лучи (высоких энергий)	10^{12} МэВ – 10^{14} МэВ	Ядра галактик.

В заключение отметим еще несколько свойств обсуждаемых спектров частиц. Как видно из графиков и таблицы, наиболее энергичными частицами являются космические лучи. В первую очередь это связано с тем, что они имеют неограниченную природу, так как их энергии многократно увеличиваются за счет различных механизмов ускорения. Такие механизмы связаны с электрическими и магнитными полями, поэтому могут работать лишь для заряженных частиц. Вследствие этого, высокоэнергичные нейтрино и фотоны, которые могут рождаться в этих областях, образуются как вторичные частицы при распаде π -мезонов. Соответственно, они имеют меньшую энергию, чем космические лучи. Кроме того, фотоны торнадо сильнее взаимодействуют с межзвездным и межгалактическим газом, поэтому их спектр в высокоэнергичной части мягче, чем нейтринный.

1.2 Единицы измерения, измерение расстояний

Астрофизика и космология относятся к научным дисциплинам, которые в силу своей специфики используют разные разделы земной физики, которые обычно считаются не связанными друг с другом. Например, для описания взрыва сверхновой необходимо использовать одновременно и магнитогидродинамику, и физику элементарных частиц. Аналогичная ситуация возникает и при описании других астрофизических процессов и объектов. Это накладывает отпечаток на единицы измерения, используемые в астрофизике и космологии. Обычно в этих науках принято использовать систему единиц СГС. Однако иногда встречаются и другие единицы измерения, например, используемые в физике элементарных частиц. Так, для энергии фотонов и других частиц, особенно в высокоэнергичной области, используется внесистемная единица электронвольт. Это энергия, которую приобретает электрон в электрическом поле, проходя разность потенциалов в 1 Вольт:

$$1 \text{ эВ} \simeq 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \simeq 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}. \quad (1)$$

В этих же единицах может измеряться масса частиц, исходя из эквивалентности массы и энергии: $E = mc^2$. Отметим, что такой способ измерения энергии и массы частиц базируется на системе, подробно рассмотренной ниже.

Таким образом, в согласии с детальными расчётами [10] на стадии коллапса длительности $\tau_1 \sim 0,1$ сек рождается «быстрый» всплеск длительности $\tau_2 \sim 10^{-2}$ сек с типичной светимостью $L_{\nu_e} \approx 10^{53}$ эрг/сек (286) электронных нейтрино.

На стадии (2) («захват» нейтрино и томологичный коллапс) доминирует реакция (253) захвата ν_e нейтроном. Типичные времена и плотность вещества ρ_{ncp} , при которой происходит «захват» нейтрино, оцениваются из условия (262). При этом t_{coll} подставляется из формулы (280), а время диффузии нейтрино в реакции (253):

$$t_{diff} \approx \frac{\bar{R}}{c} \frac{\bar{R}}{\lambda_n}, \quad (287)$$

где длина пробега нейтрино в этом процессе:

$$\lambda_n = \frac{1}{\sigma_{nn} N_n} \approx \frac{m_N}{\sigma_{nn} (1 - Y_e) \rho}. \quad (288)$$

Сечение захвата нейтрино нейтроном при условии $E_\nu^2 \gg m_e^2$ [5]:

$$\sigma_{\nu_e + n \rightarrow p + e} \approx \frac{G_F^2 c_v^2}{\pi} (1 + 3g_v^2) E_\nu^2 \frac{1}{1 + e^{-\frac{E_\nu - \mu_e}{T}}}. \quad (289)$$

При $E_\nu \gg \mu_e$, $\mu_e \simeq 10^2 m_e$, $\bar{R} \simeq 50$ км, $Y_e \simeq 0,4$, $T \simeq 0,7$ МэВ, получим из (262), (287) – (289):

$$\rho_{ncp} \approx 10^{12} \text{ г/см}^3, \quad t_{diff}(\rho_{ncp}) \approx 10^{-2} \text{ сек}. \quad (290)$$

Таким образом, «захват» нейтрино на стадии (2) в соответствии с детальными расчётами [10] происходит за типичные времена $\tau_2 \approx 10^{-2}$ сек при плотности вещества центральной части $\rho_{ncp} \approx 10^{12} \text{ г/см}^3$. Отметим, что типичные характеристики на стадии (3) («отскок» ударной волны и её распространение наружу) не могут быть получены из простых соображений, поскольку требуют довольно сложного численного расчёта формирования обратной ударной волны и её распространения наружу с учётом диссипации энергии в процессах (249), (250), (251), (252), (253) – (261). Ситуация сильно осложняется тем, что область $R_\nu \leq r \leq R_s$ частично прозрачна для нейтрино и требуется учёт как процессов излучения (251), (252), (258) – (261), так и процессов поглощения и рассеяния (253) – (257) при прохождении нейтринного потока через вещество. Что же касается стадии (4) (Кельвина - Гельмгольца), то основные характеристики нейтринного излучения на ней надёжно оцениваются формулами (271) – (278).

По мере увеличения плотности при коллапсе растёт вероятность захвата протоном электрона в процессе (252). Скорость данного процесса может быть представлена в виде [5]:

$$\Gamma_{p+e \rightarrow n+\nu} \simeq \frac{G_F^2}{2\pi^3} c_e^2 (1 + 3g_a^2) N_p I, \quad (281)$$

$$I = \int_{\Delta} dE_e E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2} (E_e - \Delta)^2 f_e (1 - f_\nu),$$

где N_p – концентрация протонов, E_e – энергия электрона, $\Delta = m_n - m_p$, f_e, f_ν – функции распределения электронов, нейтрино, соответственно, $c_v = 1/2 + 2 \sin^2 \theta_w$ – векторная константа электрослабого тока для ν_e ($c_v^2 \simeq 0,93$), $g_a \simeq 1,26$ – аксиальная константа слабого нуклонного тока. При условии $f_\nu \ll 1$ (нейтрино излучаются свободно), $\mu_e \gg m_e, T$ (сильно вырожденный электронный газ):

$$I \simeq \frac{1}{5} \mu_e^5. \quad (282)$$

В свою очередь, химический потенциал сильно вырожденного электронного газа:

$$\mu_e \simeq \left(3\pi^2 Y_e \frac{\rho}{m_N} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 51,6 \text{ МэВ} \cdot Y_e^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho}{10^{12} \text{ г/см}^3} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (283)$$

При условии, что основной поток нейтрино в ν_e - всплеске реакции (252) излучился непосредственно перед «захватом» нейтрино веществом ($\rho \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ г/см}^3$), во-первых, из (280) следует, что он «быстрый» ($\tau_\nu \sim 10^{-2} \text{ сек}$), во-вторых, из условия «захвата»:

$$< E_\nu > \sim < E_e > \sim \mu_e. \quad (284)$$

Нейтринная светимость в «быстром» ν_e - всплеске может быть оценена следующим образом:

$$L_{\nu_e} \approx < E_\nu > \Gamma_{p+e \rightarrow n+\nu} \frac{4}{3} \pi \bar{R}^3, \quad (285)$$

где $\bar{R} \approx (20 - 30) \text{ км}$ – область центральной части, излучающая нейтрино. Подставляя в (285) формулы (281) – (284), получим:

$$L_{\nu_e} \approx 10^{53} \text{ эрг/сек} \cdot Y_e^2 \left(\frac{\rho}{10^{12} \text{ г/см}^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{\bar{R}}{50 \text{ км}} \right)^3. \quad (286)$$

В физике частиц часто используется так называемая естественная система единиц. Ее необычность состоит в том, что некоторые фундаментальные постоянные в ней считаются равными единице:

$$c = \hbar = k = 1, \quad (2)$$

где c – скорость света в вакууме, \hbar – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана. В такой системе есть лишь одна основная единица измерения, а не три, как в других. За нее обычно принимается единица измерения массы $[m]$, равная 1 МэВ. Из определения естественной системы единиц следует, что, например, энергия, импульс и температура измеряются в ней в МэВ, а расстояние и время — в МэВ^{-1} , то есть $[E] = [p] = [T] = [L^{-1}] = [t^{-1}] = [m] = \text{МэВ}$. По началу это может показаться непривычным, однако это неудобство компенсируется тем, что формулы в естественной системе единиц не загромождаются фундаментальными постоянными.

Для перехода от естественной системы единиц к СГС или другим системам необходимо восстановить степени фундаментальных постоянных c , \hbar и k , которые были положены равными единице. Для этого исходное выражение можно домножить на произвольную комбинацию c , \hbar и k и приравнять размерность полученного выражения требуемой. Допустим, исходное выражение было $[m^{a_M}]$, а требуемая размерность есть $[L^{a_L} m^{a_m} t^{a_t} T^{a_T}]$, где $[L]$, $[m]$, $[t]$, $[T]$ – размерности длины, массы, времени и температуры. Если для восстановления размерности умножить исходное выражение на $c^\alpha \hbar^\beta k^\gamma$, то на неизвестные коэффициенты α , β , γ получаем следующее уравнение:

$$[m^{a_M} c^\alpha \hbar^\beta k^\gamma] = [L^{a_L} m^{a_m} t^{a_t} T^{a_T}]. \quad (3)$$

Добавив к этому уравнению условие $a_M = a_m + a_T - a_L - a_t$, следующее из того, что размерность исходного выражения должна совпадать с конечной, получаем следующие значения коэффициентов:

$$\alpha = -a_L - 2a_t + 2a_T, \quad \beta = a_L + a_t, \quad \gamma = -a_T, \quad (4)$$

позволяющих восстановить размерности фундаментальных постоянных c , \hbar и k . Заметим, что полученные коэффициенты не зависят от размерностей массы a_m и исходного выражения a_M , что связано с согласованием размерности начального и конечного выражений.

Здесь следует сделать важное замечание, относительно полученного выше выражения (4). При его выводе предполагалось, что размерности

начального и конечного выражений согласованы: $a_M = a_m + a_T - a_L - a_r$. Однако это нарушается, если в преобразуемом выражении содержатся элементарный заряд e либо электрические и магнитные поля E и B по отдельности. Действительно, как известно, эти величины имеют разную размерность в разных системах единиц и результаты восстановления c , \hbar и k будут зависеть от конечной системы. Такая неоднозначность пропадает, если преобразуются комбинации eE и eB , так как они во всех системах единиц имеют одинаковую размерность, соответствующую силе, а выражения, содержащие их, могут преобразовываться напрямую по формуле (4). Для правильного преобразования выражений, содержащих e без E или B , удобно воспользоваться связью элементарного заряда с постоянной тонкой структуры $\alpha \simeq 1/137$, которая является безразмерной константой в любой системе единиц. Так, например, в СГС $e = \sqrt{\alpha \hbar c}$, поэтому каждая степень заряда будет добавлять лишний по сравнению с (4) множитель $1/\sqrt{\alpha \hbar c}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} e^{a_e} [\text{МэВ}^{a_M}] &= \\ &= c^{-a_L - 2a_r + 2a_T - a_e/2} \hbar^{a_L + a_e - a_r/2} k^{-a_T} \mathcal{X} e^{a_e} [\text{см}^{a_L} c^{a_M} \text{К}^{a_T} \text{г}^{a_m}], \quad (5) \end{aligned}$$

где \mathcal{X} – преобразуемое выражение, a_e – степень в нем элементарного заряда e , не входящего в комбинации eE и eB . Из данного выражения можно получить переводные коэффициенты для любых физических величин, наиболее часто встречающиеся из которых приведены в таблице 2.

Часто в естественной системе единиц выражения содержат массу какой-либо частицы. В этом случае удобно воспользоваться соотношениями, переводящими массу этой частицы в основные единицы другой системы. Например, для перевода массы электрона m_e в основные единицы СГС можно использовать следующие выражения:

$$\begin{aligned} m_e &= m_e \simeq 9.11 \cdot 10^{-28} \text{ г}, \\ m_e &= m_e c^2 / k \simeq 5.93 \cdot 10^9 \text{ К}, \\ 1/m_e &= \hbar / m_e c \simeq 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ см}, \\ 1/m_e &= \hbar / (m_e c^2) \simeq 1.29 \cdot 10^{-21} \text{ с}, \\ m_e^2 / e &= m_e^2 c^3 / (e \hbar) \simeq 4.41 \cdot 10^{13} \text{ Гс}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если подобные соотношения необходимо получить для других частиц, то это без труда может быть сделано, если в полученные выражения ввести отношения массы электрона к массе интересующей частицы. Ниже

При получении формулы (276) учтено, что время прямого «пролёта» нейтрино (R_{NS}/c) должно быть умножено на так называемый фактор случайного блуждания (R_{NS}/λ), где

$$\lambda_\nu = \frac{1}{\sigma_{\nu N} n_N} \simeq \frac{1}{\sigma_{\nu N}} \frac{m_N}{\rho_\pi} \simeq \frac{\pi m_N}{G_F^2 \varepsilon_\nu^2 \rho_\pi} \quad (277)$$

– средняя длина пробега нейтрино при их взаимодействии с нуклонами среды.

Подставляя λ_ν в (276), получим:

$$\begin{aligned} t_\nu &\lesssim \frac{R_{NS}^2 G_F^2 \varepsilon_\nu^2 \rho_\pi}{\pi c m_N} \lesssim \\ &\lesssim 10 \text{ сек} \cdot \left(\frac{\rho_\pi}{3 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_\nu}{30 \text{ МэВ}} \right)^2 \cdot \left(\frac{R_{NS}}{15 \text{ км}} \right)^2 \end{aligned} \quad (278)$$

Из этих оценок можно составить представление (конечно, лишь по порядку величины) об основных параметрах нейтринного излучения: за всё время излучается энергия $E_\nu^{tot} \approx 10^{53}$ эрг, средняя температура нейтринного теплового излучения составляет $T_\nu \approx 10$ МэВ, типичная продолжительность стадии $t_\nu \approx (1 - 10)$ сек.

Для оценки по порядку величины основных параметров нейтринного излучения на стадиях (1), (2) требуется более детальная информация о доминирующих нейтринных процессах с учётом быстрого коллапса центральной части. Прежде всего, вводятся характерное динамическое время (время свободного падения) как время, за которое частицы шара массы M , начальных радиуса R_0 и плотности ρ_0 падают на центр при условии, что существуют только силы гравитационного притяжения. Такое время легко оценивается из закона сохранения механической энергии элемента шара, находящегося на его поверхности:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{G M}{R} = - \frac{G M}{R_0}. \quad (279)$$

Предполагается, что $R(t=0) = R_0$, $R(t = t_{coll}) = 0$. Интегрирование уравнения (279) приводит к результату:

$$t_{coll} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \rho_0}} \approx 4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{10^{12} \text{ г/см}^3}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ сек}. \quad (280)$$

Для оценки продолжительности стадии (1) следует подставить в (280) $\rho_0 \simeq 3 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$, что даёт $\tau \approx 0,1$ сек.

5.3 Основные характеристики нейтринного излучения

Оценить основные характеристики нейтринного излучения (полная средняя энергия, средняя энергия, приходящаяся на одно нейтрино, типичные времена излучения) можно из простых соображений. Энергия, выделявшаяся при гравитационном коллапсе $E_{\text{тр}}$ (268), за вычетом потерь на гравитационное излучение, должна быть равномерно распределена по каждому из 6 стандартных (анти) нейтринных степеней свободы:

$$< E_{\nu_i}^{\text{tot}} > \approx \frac{1}{6} E_{\text{тр}} \approx 10^{53} \text{ эрг.} \quad (271)$$

Тепловая энергия, запасённая в ядре сверхновой на стадии (3) («отскок» ударной волны), может быть оценена по теореме вириала:

$$2 < \varepsilon_n > \approx \frac{GM_{\text{NS}} m_n}{R_{\text{NS}}}, \quad (272)$$

где $< \varepsilon_n >$ – тепловая энергия, приходящаяся на один нуклон ядра, а в правой части (272) – гравитационная энергия притяжения нуклона к ядру, откуда получим:

$$< \varepsilon_n > \approx 25 \text{ МэВ} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1, 4M_{\odot}} \right) \cdot \left(\frac{15 \text{ км}}{R_{\text{NS}}} \right). \quad (273)$$

Считая нуклонный газ нерелятивистским и невырожденным, получим оценку температуры ядра:

$$T_{\text{я}} \approx \frac{2}{3} < \varepsilon_n > \approx 17 \text{ МэВ.} \quad (274)$$

Таким образом, тепловое нейтринное излучение с поверхности $R_{\text{NS}} \sim (10 - 20) \text{ км}$ должно иметь типичные температуры

$$T_{\nu} \sim 10 \text{ МэВ.} \quad (275)$$

Типичные времена нейтринного излучения на самой протяжённой по времени стадии Кельвина - Гельмгольца могут быть получены из тех соображений, что основная доля энергии излучения с поверхности нейтриносферы происходит за время диффузии тепловых нейтрино к этой поверхности:

$$t_{\nu} \approx t_{\text{diff}} \approx \frac{R_{\text{NS}}}{c} \cdot \frac{R_{\text{NS}}}{\lambda_{\nu}}. \quad (276)$$

Таблица 2
Переводные коэффициенты из естественной системы единиц в СГС

Длина	$1 \text{ МэВ}^{-1} \simeq 1.97 \cdot 10^{-11} \text{ см}$
Время	$1 \text{ МэВ}^{-1} \simeq 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ с}$
Масса	$1 \text{ МэВ} \simeq 1.78 \cdot 10^{-27} \text{ г}$
Энергия	$1 \text{ МэВ} \simeq 1.60 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$
Импульс	$1 \text{ МэВ} \simeq 5.34 \cdot 10^{-17} \text{ г см с}^{-1}$
Температура	$1 \text{ МэВ} \simeq 1.16 \cdot 10^{10} \text{ К}$
Сила	$1 \text{ МэВ}^2 \simeq 8.12 \cdot 10^4 \text{ дин}$
Светимость	$1 \text{ МэВ}^2 \simeq 2.43 \cdot 10^{15} \text{ эрг с}^{-1}$
Поток частиц	$1 \text{ МэВ}^3 \simeq 3.90 \cdot 10^{42} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$
Поток энергии	$1 \text{ МэВ}^4 \simeq 6.25 \cdot 10^{36} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1}$
Плотность числа частиц	$1 \text{ МэВ}^3 \simeq 1.30 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}$
Плотность массы	$1 \text{ МэВ}^4 \simeq 2.32 \cdot 10^5 \text{ г см}^{-3}$
Плотность энергии, давление	$1 \text{ МэВ}^4 \simeq 2.09 \cdot 10^{26} \text{ эрг см}^{-3}$
Светимость единицы объема	$1 \text{ МэВ}^5 \simeq 3.17 \cdot 10^{47} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}$
Плотность силы	$1 \text{ МэВ}^5 \simeq 1.06 \cdot 10^{37} \text{ дин см}^{-3}$
Электрическое, магнитное поле	$1 \text{ МэВ}^2 \simeq 1.44 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$

для справки приведены массы наиболее известных частиц, дополненные массами тяжелых частиц такого же типа:

$$\begin{aligned} m_{\nu} &< 2 \cdot 10^{-6} \text{ МэВ} \simeq 3.57 \cdot 10^{-33} \text{ г}, \\ m_e &\simeq 0.511 \text{ МэВ} \simeq 9.11 \cdot 10^{-28} \text{ г}, \quad m_{\tau} \simeq 1776.82 \text{ МэВ} \simeq 3.17 \cdot 10^{-24} \text{ г}, \\ m_u &\simeq 2.3 \text{ МэВ} \simeq 4.10 \cdot 10^{-27} \text{ г}, \quad m_t \simeq 173.5 \text{ ГэВ} \simeq 3.09 \cdot 10^{-22} \text{ г}, \\ m_{\pi^0} &\simeq 134.98 \text{ МэВ} \simeq 2.41 \cdot 10^{-25} \text{ г}, \quad m_{\Upsilon(11020)} \simeq 11.02 \text{ ГэВ} \simeq 1.96 \cdot 10^{-23} \text{ г}, \\ m_p &\simeq 938.27 \text{ МэВ} \simeq 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г}, \quad m_{Q_c^-} \simeq 6071 \text{ МэВ} \simeq 1.08 \cdot 10^{-23} \text{ г}, \\ m_Z &\simeq 91.19 \text{ ГэВ} \simeq 1.63 \cdot 10^{-22} \text{ г}, \quad m_H \simeq 125 \text{ ГэВ} \simeq 2.23 \cdot 10^{-22} \text{ г}. \end{aligned}$$

где m_{ν} – суммарная масса всех нейтрино (на нее имеется лишь верхнее ограничение), m_e и m_{τ} – массы электрона и тяжелого τ -лептона, m_u и m_t – массы легкого и тяжелого u - и t -кварков, m_{π_0} и $m_{\Upsilon(11020)}$ – массы легкого и тяжелого π^0 - и $\Upsilon(11020)$ -мезонов, m_p и $m_{Q_c^-}$ – массы протона и тяжелого барiona Q_c^- , а m_Z и m_H – массы Z -бозона и бозона Хиггса.

Отметим еще одно полезное в естественной системе единиц соотношение, включающее в себя гравитационную постоянную G_N . В этой системе она имеет размерность m^{-2} . Поэтому удобно ввести так называемую планковскую массу:

$$M_{Pl} = \sqrt{\hbar c / G_N} \simeq 2.18 \cdot 10^{-5} \text{ г} \simeq 1.22 \cdot 10^{22} \text{ МэВ.} \quad (7)$$

Тогда гравитационная постоянная в естественной системе единиц может быть выражена как:

$$G_N = M_{Pl}^{-2} \simeq 6.71 \cdot 10^{-45} \text{ МэВ}^{-2} \simeq 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ дин см}^2/\text{г}^2. \quad (8)$$

Для сравнения приведем здесь константу слабого взаимодействия:

$$G_F \simeq 1.17 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ}^{-2}, \quad (9)$$

наглядно демонстрирующую малость гравитационного взаимодействия по сравнению со всеми остальными. В заключение обсуждения естественной системы единиц и перехода из нее в систему СГС приведем в таблице 3 значения наиболее часто употребляемых физических констант.

Таблица 3
Физические константы в естественной системе единиц (ЕСИ) и СГС

Название величины	СГС	ЕСИ
Скорость света, c	$2.998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$	1
Постоянная Планка, \hbar	$1.05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг с}$	1
Постоянная Больцмана, k	$1.38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К}$	1
Элементарный заряд, e	$4.80 \cdot 10^{-10} \text{ Фр}$	$\sqrt{\alpha} \simeq 0.085$
Гравитационная постоянная, G_N	$6.67 \cdot 10^{-8} \text{ дин см}^2/\text{г}^2$	$6.71 \cdot 10^{-45} \text{ МэВ}^{-2}$
Масса Планка, M_{Pl}	$2.18 \cdot 10^{-5} \text{ г}$	$1.22 \cdot 10^{22} \text{ МэВ}$
Масса электрона, m_e	$9.11 \cdot 10^{-28} \text{ г}$	0.511 МэВ
Масса протона, m_p	$1.673 \cdot 10^{-24} \text{ г}$	938.27 МэВ
Масса нейтрона, m_n	$1.675 \cdot 10^{-24} \text{ г}$	939.57 МэВ
Масса Луны, M_M	$7.35 \cdot 10^{25} \text{ г}$	$4.12 \cdot 10^{22} \text{ МэВ}$
Масса Земли, M_\oplus	$5.97 \cdot 10^{27} \text{ г}$	$3.35 \cdot 10^{24} \text{ МэВ}$
Масса Юпитера, M_J	$1.90 \cdot 10^{30} \text{ г}$	$1.07 \cdot 10^{27} \text{ МэВ}$
Масса Солнца, M_\odot	$1.99 \cdot 10^{33} \text{ г}$	$1.12 \cdot 10^{30} \text{ МэВ}$
Радиус Луны (экват.), R_M	$1.74 \cdot 10^8 \text{ см}$	$8.82 \cdot 10^{18} \text{ МэВ}^{-1}$
Радиус Земли (экват.), R_\oplus	$6.38 \cdot 10^8 \text{ см}$	$3.23 \cdot 10^{19} \text{ МэВ}^{-1}$
Радиус Юпитера (экват.), R_J	$7.15 \cdot 10^9 \text{ см}$	$3.62 \cdot 10^{20} \text{ МэВ}^{-1}$
Радиус Солнца, R_\odot	$6.96 \cdot 10^{10} \text{ см}$	$3.53 \cdot 10^{21} \text{ МэВ}^{-1}$
Большая полуось лунной орбиты, a_M	$3.84 \cdot 10^{10} \text{ см}$	$1.95 \cdot 10^{21} \text{ МэВ}^{-1}$
Солнечная светимость, L_\odot	$3.83 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}$	$1.33 \cdot 10^4 \text{ МэВ}^2$

Кроме единиц, вошедших в астрофизику и космологию из физики частиц, в этих науках часто применяются и свои внесистемные единицы. Так, в качестве эталона светимости объектов, то есть энергии, используется или в единицу времени, в астрофизике обычно используется солнечная светимость:

$$L_\odot \simeq 3.83 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}. \quad (10)$$

1. Коллапс с быстрым ν_e - всплеском ($\sim 10^{-1}$ сек).

Нейтринные реакции (251) и (252) резко ускоряют коллапс. Быстрый всплеск электронных нейтрино, по сути, служит наблюдательным индикатором старта взрыва сверхновой с коллапсом центральной части.

2. Захват нейтрино и томологичный коллапс ($\sim 10^{-2}$ сек).

Появление нейтринной «вязкости» переводит коллапс в томологичный, то есть самоподобный, с сохранением относительного профиля плотности коллапсирующей центральной части. Нейтрино при этом составляют «море Дирака» вместе с лептонами с типичным химическим потенциалом $\mu_\nu \simeq \mu_e$. Однако окружающие эту область слои вещества продолжают аккрецировать на центральную область со сверхзвуковой скоростью, создавая ударную гидродинамическую волну.

3. «Отскок» ударной волны и её распространение наружу (~ 1 сек).

При достижении ядерных плотностей протон-нейтринно-нейтринная часть внутренней области (в дальнейшем – ядро) становится вырожденной. С увеличением плотности резко возрастает давление такой среды наружу, что приводит к гидродинамическому «отскоку» внешней ударной волны. «Отскок» является основным механизмом перекачки гравитационной энергии, выделяющейся при коллапсе (268), в кинетическую энергию ударной волны наружу ($E_k \gtrsim 10^{51}$ эрг). Однако ударная волна диссипирует свою энергию на диссоциацию ядер и излучение нейтрино в ключевых процессах (251), (252), (258) – (261) и останавливается при $M_a \gtrsim M_{dh}$.

4. Стадия Кельвина - Гельмгольца (~ 10 сек).

Ядро прото-нейтринной звезды типичного размера $R_p \nu_s \approx 10$ км остывает за счёт излучения нейтрино и достигает β -равновесия в URCA - процессах при типичных $Y_p \lesssim 0.1$. Тем самым ядро превращается в нейтринную звезду. Мощный поток нейтрино через внутреннюю часть оболочки с достаточно большим градиентом температуры и плотности нагревает область фронта стагнировавшей ударной волны. Хватит ли энергии для её регенерации? Вопрос к настоящему моменту остаётся открытым.

численных расчётов. Несмотря на громадные затраты машинного времени, такие расчёты проводятся в настоящее время [14].

Хватит ли энергии нейтринного излучения на эффективный «подогрев» застоявшейся ударной волны?

При ответе на этот вопрос исходят из базовых соображений, что при коллапсе в нейтронную звезду высвобождается гравитационная энергия:

$$E_{\text{гп}} \simeq \frac{3}{5} \frac{GM_{\text{NS}}^2}{R_{\text{NS}}} \simeq 3 \cdot 10^{53} \text{ эрг} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1.4 M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ км}}{R_{\text{NS}}} \right). \quad (268)$$

Доминирующая часть этой энергии излучается через нейтрино при остывании внутренней оболочки и ядра:

$$E_{\nu, \bar{\nu}} \approx E_{\text{гп}} \approx 10^{53} \text{ эрг}. \quad (269)$$

Таким образом, необходимо динамически перекачать $\approx 1\%$ энергии нейтрино в кинетическую энергию разлёта оболочки (энергию «подогрева» ударной волны):

$$E_k \approx 10^{51} \text{ эрг} \approx 1\% \cdot E_{\nu, \bar{\nu}}. \quad (270)$$

Это — так называемая проблема FOE (10^{51} эрг). Несмотря на малость доли энергии, условие (270) практически очень трудно выполнить вследствие чрезвычайно малой эффективности электрослабых процессов взаимодействия нейтрино с веществом. Проводимые двух- и трёхмерные расчёты [14] покажут в ближайшие годы, насколько оправданы наши ожидания нейтринной регенерации ударной волны.

Подведём итог данного параграфа. В течение более 50 лет, начиная с 50-х годов XX века по настоящее время, детально разработана модель сферически-симметричного коллапса с «отскоком» ударной волны. Разумеется, это простейшая модель взрыва сверхновой с коллапсом центральной части, не учитывающая эффектов быстрого вращения ядра и сильных магнитных полей, неизбежно возникающих при таком вращении. В ближайшее время будет выяснено, способна ли такая модель описать успешный взрыв сверхновой в случае когда $M_{\text{я}} \gtrsim M_{\text{ch}}$. Однако уже в рамках такой модели выясняется ключевая роль, которую играют нейтрино при излучении и последующем распространении через плотные слои оболочки сверхновой. По этой причине, принципиально важно найти из моделирования спектр нейтринного излучения и сравнить его с наблюдательными данными.

Перечислим ещё раз основные стадии взрыва сверхновой в данной модели по терминологии работы [8].

Данная величина соответствует полной светимости Солнца во всем диапазоне электромагнитного излучения.

Зачастую в астрофизике и космологии приходится иметь дело не со светимостью объекта, а с принимаемым от него потоком, который падает с увеличением расстояния. Для измерения этой величины в астрономии используется безразмерная логарифмическая единица, получившая название относительной звездной величины:

$$m = -2.5 \lg (F/F_0), \quad (11)$$

где F и F_0 — потоки от объекта и некоторого эталона, соответствующего нулевой звездной величине, называемого нуль-пунктом. В качестве таких объектов выбираются звезды, не являющиеся переменными, со стабильным и точно измеренным потоком. Коэффициент в этом выражении выбран так, что более яркие, чем нуль-пункт, объекты имеют отрицательные звездные величины. Уменьшение звездной величины на 5 соответствует возрастанию потока в 100 раз, а на единицу — примерно в 2.5 раза.

Для практических целей применяются разные относительные звездные величины. Так, если для определения звездной величины используют полный поток во всем диапазоне частот, то ее называют болометрической звездной величиной m_B . Если поток берется в определенном фильтре (небольшом диапазоне энергетического спектра), то такая звездная величина называется по названию фильтра. Так, наиболее распространенной является видимая звездная величина m_V , соответствующая V -фильтру с центральной частотой $\lambda_V = 555 \text{ нм}$ и шириной $\Delta\lambda \simeq 90 \text{ нм}$, что приходится на середину видимого диапазона. За эталонный поток в этом фильтре можно грубо принимать поток квантов с центральной частотой, равный 10^4 квантов/($\text{см}^2 \text{ с нм}$). С учетом ширины V -фильтра получаем эталонный поток:

$$F_{0V} \simeq 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \text{ с}). \quad (12)$$

В видимом диапазоне за нуль-пункт может быть принята Вега, которая имеет видимую звездную величину $m_V \simeq 0.03$ и является одной из самых ярких звезд. Солнце для нас представляется самым ярким источником и имеет видимую звездную величину $m_V \simeq -26.7$. Для сравнения, предельная звездная величина крупных оптических телескопов составляет примерно $m_V \simeq 29$, то есть даже такие тусклые объекты еще могут на них наблюдаться. Отметим, что по видимой звездной величине не всегда

можно правильно судить о полном потоке от источника, так как очень горячие или очень холодные объекты излучают преимущественно вне видимого диапазона и для них более актуальной является болометрическая звездная величина. Кроме того, если известны звездные величины источника в разных диапазонах энергии, то по ним можно судить о виде излучаемого этим объектом спектра.

Кроме перечисленных выше относительных звездных величин, в астрономии часто используется абсолютная звездная величина M . По определению, это звездная величина, которую бы имел источник, если бы он был расположен на расстоянии, равном $D = 10$ пк. Так как поток с расстоянием уменьшается как $F = L/(4\pi D^2)$, то абсолютная и относительная звездные величины связаны соотношением:

$$M = m + 5 - 5 \lg(D/\text{пк}), \quad (13)$$

где для удаленных объектов еще необходимо учитывать поглощение света в межзвездной среде. Из приведенной формулы получаем, что для Солнца абсолютная видимая звездная величина составляет $M \simeq 4.8$, тогда как для ярких голубых сверхгигантов она достигает $M \sim -10$, а для слабых корневых карликов всего лишь $M \sim 18$. Так как по определению абсолютная звездная величина определяется отношением потоков на фиксированном расстоянии, то она может быть выражена через светимости объектов:

$$M = M_0 - 2.5 \lg(L/L_0) \simeq 4.8 - 2.5 \lg(L/L_\odot), \quad (14)$$

где M_0 – абсолютная звездная величина некоторого эталона, а L_0 – его светимость. Таким образом, абсолютная звездная величина является логарифмической мерой светимости объекта, тогда как относительная – мерой его потока, зависящего от расстояния до объекта.

В астрофизике и космологии часто даже вместо основных единиц измерения используют внесистемные. Это обусловлено спецификой изучаемых объектов, для которых характерные масштабы масс, расстояний и времен несравнимы с земными. Например, для измерения больших промежутков времени в астрофизике и космологии обычно используют единицы, базирующиеся на понятии года. В астрономии существуют несколько разных определений года, содержащих, соответственно, разное количество секунд. Если использовать юлианский год, который равен средней продолжительности года в юлианском календаре, то он точно равен 365.25 юлианским дням по 86400 секунд. Однако и эта величина

20 – 30 нейтронных звезд. Массы разбросаны в интервале $(1 - 2) M_\odot$, самый массивный из измеренных в настоящий момент объектов имеет массу $M = (1.97 \pm 0.04) M_\odot$ [11]. Несмотря на скудность экспериментальных данных, ясно, что успешный взрыв сверхновой происходит и при существенном превышении массы ядра M_{cr} . По этой причине наиболее интригующей является четвёртая, по терминологии работы [8], стадия нейтринного осыпания ядра сверхновой и регенерации ударной волны наружу (так называемая стадия Кельвина-Гельмгольца). На этой стадии схематически выделяют ядро, наиболее плотную и непрозрачную для нейтрино область $r \lesssim R_\nu$, где R_ν – радиус нейтриносферы, и внутреннюю часть оболочки $R_\nu \lesssim r \leq R_s$, где R_s – типичный радиус стадии ударной волны ($R_s \approx (100 - 200)$ км). По мере нейтринного осыпания внутренней оболочки (типичные времена ~ 0.1 сек) R_ν приближается к размеру ядра с плотностями $\rho \gtrsim \rho_n$ $R_\nu \approx R_{pns} \approx 10$ км и образуется горячая прото-нейтронная звезда, остывающая за счёт излучения нейтрино всех сортов с поверхности нейтриносферы. Излучение порождается базовыми нейтринными реакциями (252), (258), (259) – (261). ПРСА-процессы нейтринного перезлучения $\nu_e, \bar{\nu}_e$:

$$p + e^- \rightleftharpoons n + \nu_e, \quad (264)$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e \quad (265)$$

заставляют перейти ядро в состояние β -равновесия:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n + \mu_\nu, \quad (266)$$

сильно обогащённого нейтронами

$$Y_\nu \lesssim 0.1. \quad (267)$$

Собственно, это обстоятельство и позволяет называть образовавшуюся звезду нейтронной. Мощный поток нейтрино подогревает фронт остановившейся ударной волны. Сценарий взрыва сверхновой по такому механизму называется «сценарием взрыва с задержкой и нейтринным подогревом» [12].

Поток нейтрино во внутренней части оболочки при достаточно сильном градиенте температуры и плотности порождает крупномасштабную конвекцию в оболочке, также способствующую подогреву ударной волны [13]. Заметим, что учёт конвекции требует двухмерных и трёхмерных

вторая стадия взрыва сверхновой – «захват» нейтрино и гомологичный коллапс.

Процесс заканчивается при достижении плотности внутренней части ядерной плотности

$$\rho_{in} \simeq \rho_n \simeq 2.7 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3. \quad (263)$$

На данной стадии давление сильно связанных вырожденных протонов и нейтронов настолько велико, что сравнивается с гравитационным. Происходит отскок внешнего падающего со сверхзвуковой скоростью вещества наружу и формируется ударная волна [5].

Казалось бы, таким образом происходит взрыв сверхновой. При условии, что ударной волне при отскоке сообщается $E_k \gtrsim 1FOE = 10^{51}$ эрг (а это действительно имеет место, как показывают численные расчёты), всё в порядке. Данный механизм определяет третью стадию взрыва сверхновой – отскок ударной волны и её распространение наружу [8]. Сценарий такого взрыва был назван «сценарием прямого взрыва сверхновой» [9]. Однако распространение ударной волны наружу сопровождается:

- процессами диссоциации ядер элементов по фронту ударной волны,
- нейтринным излучением оболочки в доминирующих реакциях (252), (258) – (261),
- аккрецией окружающих внутреннюю часть слоёв оболочки.

Как показывают детальные расчёты в модели сферически-симметричного коллапса [10], ударная волна тормозится с последующим падением на ядро при $M_{\text{я}} \gtrsim M_{\text{ch}}$ и взрыва не происходит.

Таким образом, по крайней мере, на третьей стадии взрыва сверхновой — отскок и распространение ударной волны наружу — необходимо учесть важные физические эффекты, которые приводят, в конце концов, к успешному взрыву сверхновой. В нашей Вселенной наблюдается несколько сотен таких взрывов в год. Диффузные туманности и нейтронные звёзды в их составе, наблюдаемые в нашей галактике, ассоциируются со взрывами сверхновых с коллапсом центральной части [6]. В нашей Галактике наблюдается более 2000 нейтронных звёзд, в основном как радиопульсары или рентгеновские пульсары в составе двойных звёздных систем [11]. По понятной причине массы могут быть оценены лишь у нейтронных звёзд в составе двойных систем. Такая оценка, зачастую с довольно большой неопределённостью, получена лишь для

является слишком маленькой, и вместо нее для измерения временных промежутков в астрофизике и космологии обычно используют миллионы лет:

$$1 \text{ млн. лет} \simeq 3.16 \cdot 10^{13} \text{ с}, \quad (15)$$

где под годом подразумевается юлианский. Отметим, что другие определения года дают близкие к приведенному значения.

Измерения масс тоже базируются на более крупных единицах, чем граммы. Так, часто для измерения масс экзопланет и тел Солнечной системы в качестве эталона берется масса Юпитера:

$$M_J \simeq 1.90 \cdot 10^{30} \text{ г}. \quad (16)$$

Другой, более часто встречающейся единицей массы, является солнечная масса:

$$M_{\odot} \simeq 1.99 \cdot 10^{33} \text{ г}. \quad (17)$$

Как правило, именно в этих единицах приводятся массы астрофизических объектов, включая галактики.

Весьма большое разнообразие внесистемных единиц в астрофизике и космологии связано с измерением длин. Так, для сравнения размеров тел Солнечной системы и звезд иногда в качестве эталона используется солнечный радиус:

$$R_{\odot} \simeq 6.96 \cdot 10^{10} \text{ см}. \quad (18)$$

Реже для этих целей применяют радиусы планет. К тому же, в отличие от Солнца, планеты обладают достаточно заметной разницей между экваториальным и полярным радиусом.

Для измерения расстояний обычно используются другие единицы. Так, в Солнечной системе естественной единицей расстояний может служить радиус орбиты одной из планет, например Земли. Именно так исторически в астрономии и была введена астрономическая единица, которая ранее принималась равной размеру большой полуоси земной орбиты. С 2012 года астрономическая единица по определению стала равна в точности:

$$1 \text{ а. е.} = 149597870700 \text{ м} \simeq 1.50 \cdot 10^{13} \text{ см}, \quad (19)$$

что приближенно соответствует среднему расстоянию от Земли до Солнца. Отметим, что в Солнечной системе расстояния измеряются достаточно точно. Наиболее прецизионным методом является метод лазерного зондирования, когда измеряется время задержки прихода отраженного от объекта сигнала и по нему рассчитывается расстояние до него. Другой метод основан на явлении тидального параллакса. Если точно измерить смещение объектов на небесной сфере за счет тидового движения Земли вокруг Солнца, то расстояние до объекта можно вычислить, если знать параметры земной орбиты.

Еще одной внесистемной единицей измерения расстояний является парсек. Это расстояние, с которого большая полуось земной орбиты под перпендикулярным лучом зрения видна под углом $1''$. Соответственно, парсек связан с астрономической единицей как

$$1 \text{ пк} = \text{ctg}(1'') \text{ а.е.} \simeq 206264.8 \text{ а.е.} \simeq 3.09 \cdot 10^{18} \text{ см.} \quad (20)$$

Однако сам парсек как единица используется редко. Так, например, в космологии стандартной единицей измерения является Мпк, что соответствует характерным для этой науки масштабам расстояний. Иногда для измерения расстояний используется путь, проходимый светом в вакууме за какое-либо время. Так, наиболее часто применяется световой год — расстояние, проходимое светом за 31557600 секунд:

$$1 \text{ св. г.} \simeq 9.46 \cdot 10^{17} \text{ см.} \quad (21)$$

Иногда также используется световая минута или секунда. Ниже приведем для справки, как связаны между собой все введенные выше единицы измерения расстояний:

$$1 \text{ пк} \simeq 3.26 \text{ св. г.} \simeq 2.06 \cdot 10^5 \text{ а.е.} \simeq 4.43 \cdot 10^7 R_{\odot} \simeq 3.09 \cdot 10^{18} \text{ см.} \quad (22)$$

Данное соотношение показывает также иерархию различных расстояний и длин, если учесть, что размер Солнечной системы принимается равным большой полуоси орбиты Плутона и составляет $\simeq 40 \text{ а.е.}$, а ближайшая к Солнцу звезда удалена на расстояние $\simeq 1.3 \text{ пк}$.

Отметим еще одну, достаточно специфическую единицу измерения расстояний, которая иногда используется в космологии. Это космологическое красное смещение z , которое определяется как

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1, \quad (23)$$

Отметим, что процессы (253), (254) (так называемые URCA-процессы) — абсолютно неупругие (нейтринно исчезают), (257) — неупругий (следствие малости массы электрона), (255), (256) — упругие, однако все они приводят к запутыванию (захвату) нейтринно веществом.

Необходимо также заметить, что при температурах среды $T_e \gtrsim 1 \text{ МэВ}$, кроме реакции (252) излучения электронных нейтрино, открываются процессы рождения (анни) нейтринно всех ароматов:

$$n + e^+ \rightarrow \bar{\nu}_e + p, \quad (258)$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i, \quad (259)$$

$$\gamma p \rightarrow \nu_i + \bar{\nu}_i, \quad (260)$$

$$\gamma + e^\pm \rightarrow \gamma + \nu_i + \bar{\nu}_i, \quad (261)$$

где $\nu_i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$.

Все эти процессы необходимо учитывать при вычислении средней длины пробега нейтринно каждого сорта в среде.

Плотность среды, при которой нейтринно захватывается средой (ρ_{trcp}), можно оценить следующим образом. Среда коллапсирует с типичными временами t_{coll} , тогда как нейтринно имеют в реакциях (253) – (257) типичные времена диффузии (средние времена исчезновения в реакциях (253), (254) или средние времена при соударениях в реакциях (255) – (257)) t_{diff} . Данные времена определяются как функции от ρ , T , Y_e . Условие

$$t_{coll} \approx t_{diff} \quad (262)$$

определяет ρ_{trcp} как функцию от T , Y_e . Забегая вперёд, укажем, что $\rho_{trcp} \simeq 10^{12} \text{ г/см}^3$. Поскольку нейтринно захватывается средой, Y_e перестаёт изменяться, так что при $\rho \gtrsim \rho_{trcp}$, $Y_e \simeq 0.35$. Захват нейтринно внутренней частью коллапсирующего ядра имеет кардинальное значение для последующей эволюции. Отметим, что ядро с «захваченными» нейтринно ($r \lesssim R_\nu$, где R_ν – радиус эффективной нейтринносферы) коллапсирует далее при условиях $Y_e = const$, $S = const$ (S – удельная энтропия), так что коллапс продолжается адиабатически. Такой коллапс называется гомологичным, поскольку сохраняет профиль изменения плотности при уменьшении размера. Это в соответствии с терминологией работы [8]

$$\alpha \rightarrow 2p + 2n. \quad (250)$$

В первой из реакций на диссоциацию каждого ядра тратится энергия $\varepsilon_{Fe} \simeq 124, 4 \text{ МэВ}$ на каждый нуклон), во второй $\varepsilon_\alpha \simeq 28, 4 \text{ МэВ}$ (9,5 МэВ на нуклон). Затраченная энергия приводит к достаточно сильному падению температуры, а следовательно, давлению среды. Однако по-настоящему коллапс развивается вследствие слабых процессов захвата электронов ядрами элементов среды и свободными протонами:

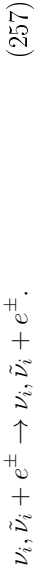


Данные процессы уменьшают Y_e и, следовательно, доминирующую компоненту давления электронного газа, тем самым ускоряя коллапс.

Отметим, что при температурах $T_c \lesssim 1 \text{ МэВ}$ центральной части коллапсирующей звезды электронные нейтрино ν_e в реакциях (251), (252) излучаются свободно. Подробный анализ реакций, в частности вопрос о типичных временах излучения нейтрино, будет проведён в следующем разделе.

Стадия, в которой доминируют процессы (249), (250), (251), (252), по терминологии работы [8] называется стадией коллапса с быстрым ν_e -всплеском.

При коллапсе растёт плотность центральной части, что приводит к захватыванию нейтрино средой. Основными процессами, приводящими к непрозрачности среды по отношению к нейтрино, являются:



где λ и λ_0 – длина волны испущенного и принятого фотона. Как известно, за счет расширения Вселенной длина волны распространяющегося в ней фотона увеличивается. Чем больше пройдет времени от момента испускания, тем сильнее увеличивается длина волны фотона и соответствующее моменту излучения красное смещение z . Удобство использования этой величины состоит в том, что она является непосредственно измеряемой и не зависит от космологической модели. Однако перевод ее в расстояние в общем случае является достаточно сложной задачей, к тому же зависит от выбора космологической модели. Эта неопределенность исчезает при $z \ll 1$, так как в этом случае $z \simeq v/c$ и для получения расстояния может быть использован закон Хаббла:

$$v = H_0 D, \quad H_0 \simeq 67.3 \text{ (км/с)/Мпк}, \quad (24)$$

где v – лучевая (радиальная) скорость галактики, D – расстояние до нее, H_0 – современное значение параметра Хаббла. Таким образом, при малых красных смещениях получаем следующее выражение для расстояния:

$$D \simeq z D_0 \simeq z \times 1.37 \cdot 10^{28} \text{ см} \simeq z \times 4.45 \text{ Гпк}, \quad z \ll 1, \quad (25)$$

где $D_0 = c/H_0$ – характерный размер видимой части Вселенной. Отметим, что точность этой формулы по сравнению с вычислениями D в рамках современной космологической модели остается удовлетворительной для грубых оценок даже при $z \sim 1$, а ошибка в этой области составляет десятки процентов. Время распространения сигнала t_L очевидно может быть найдено как

$$t_L = D/c \simeq z H_0^{-1} \simeq z \times 4.58 \cdot 10^{17} \text{ с} \simeq z \times 14.53 \text{ млрд лет}, \quad z \ll 1, \quad (26)$$

где H_0^{-1} является характерным временным масштабом современной Вселенной. Интересно сравнить это с временем жизни Вселенной, которое в рамках стандартной космологической модели оценивается как $t_0 \simeq 13.8$ млрд лет.

Следует заметить, что понятие расстояния для больших красных смещений является неоднозначным. Действительно, за то время, пока свет приходит к нам из далеких областей, Вселенная успевает существенно изменить свои размеры за счет расширения. Поэтому под расстоянием в этом случае можно понимать разные величины. Так, можно ввести расстояние между двумя точками в определенный момент времени $D(t)$,

которое будет увеличиваться из-за расширения Вселенной. Такое расстояние обычно называют собственным, и оно соответствует привычному понятию расстояния, которое может быть измерено с помощью длинного ряда линеек. Кроме собственного расстояния, еще используется координатное (сопутствующее) расстояние χ , которое не зависит от расширения Вселенной и остается постоянным. Эти два расстояния связаны между собой следующим соотношением $D(t) = a(t)\chi$, где $a(t)$ – масштабный фактор, описывающий темп расширения Вселенной. Таким образом, χ имеет смысл относительных расстояний во Вселенной, которые не меняются, так как Вселенная расширяется изотропно.

Еще одним, интуитивно достаточно понятным, определением расстояния можно считать время распространения фотона t_L от момента его излучения до приема. Соответствующее этому времени расстояние есть:

$$D_t = ct_L, \quad (27)$$

и оно определяет длину собственного пути, пройденного фотоном в расширяющейся Вселенной. Очевидно, что вследствие расширения Вселенной это расстояние будет больше собственного расстояния между источником и приемником в момент излучения фотона, но меньше этого расстояния во время его приема.

В космологии применяются и другие определения расстояний, из которых мы остановимся еще на одном. Если известна абсолютная светимость источника L (полная энергия, излучаемая в единицу времени) и в точке приема от него измерен поток энергии F , то расстояние до источника может быть вычислено как:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}, \quad (28)$$

где D_L называется фотометрическим расстоянием. Очевидно, что данное расстояние будет больше, чем D_t , так как в расширяющейся Вселенной уменьшается еще и энергия фотона, а, значит, поток падает с расстоянием быстрее, чем $F \sim 1/D_t^2$. Отметим, что фотометрическое расстояние удобно тем, что может быть непосредственно измерено, если известна светимость источника. Однако большинство даже однопетельных объектов, например, таких как звезды, имеют разную светимость, что создает серьезную трудность в определении расстояний фотометрическим методом. Тем не менее на настоящее время именно этот метод остается единственным для определения расстояний на больших масштабах. В за-

5 Нейтринные процессы в сверхновых с коллапсом центральной части

5.1 Сверхновые с коллапсом центральной части

Взрыв сверхновой происходит на конечной стадии эволюции массивных звезд. Как известно [4], эволюция одиночной звезды определяется ее массой. При $2.5M_\odot \lesssim M \lesssim 8M_\odot$ термоядерное горение прекращается на кислороде, поскольку CO -ядро звезды по мере возрастания плотности становится вырожденным. В этом случае дальнейшее повышение плотности не приводит к росту температуры, и звезда превращается в CO -белый карлик. При $8M_\odot \lesssim M \lesssim 10M_\odot$ термоядерное горение до смеси кислорода, неона и магния и ядро вырождается на этой стадии горения, превращаясь в ONeMg -белый карлик. Лишь при $M \gtrsim 10M_\odot$ термоядерная эволюция в ядре происходит при невырожденных условиях вплоть до образования элементов группы железа (Fe , Co , Ni). Звезда неизбежно теряет устойчивость на стадии образования железного ядра, когда его масса достигает значения, равного пределу Чандрасекара: $M_{\text{Ch}} \simeq 1.46M_\odot (Y_e/0.5)^2$. Это происходит при следующих температуре, плотности и относительной концентрации электронов в ядре [5]:

$$T_c \simeq 0.8 \cdot 10^{10} \text{ K}, \quad \rho_c \simeq 0.7 \text{ МэВ}, \quad \rho_c \simeq 3 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3, \quad Y_e \simeq 0.42. \quad (248)$$

Потери устойчивости начинается с коллапса, но должна закончиться, как убедительно показывают наблюдательные данные [6], грандиозным взрывом с типичной энергией разлёта оболочки $E_k \approx 10^{51}$ эрг (10^{51} эрг $= 1 \cdot F_{\text{OE}}$) и образованием остатка взрыва в виде нейтронной звезды. Такие события ассоциируются со взрывом сверхновых SN Ib/c или SN II с коллапсом центральной части, которые мы будем обсуждать в дальнейшем. Вследствие каких механизмов коллапс массивной звезды превращается во взрыв? При рассмотрении этого вопроса становятся ясной фундаментальная роль, которую играют процессы излучения и поглощения нейтрино в плотной горячей среде ядра и оболочки сверхновой.

5.2 Роль нейтрино в динамике взрыва сверхновой

При достижении условий (248) звезда теряет устойчивость. Практически коллапс начинается развиваться с реакций диссоциации ядер железа и α -частиц [7]:



В дальнейшем удобно отделить поле излучения, приходящего от внешних источников (прямое излучение), от поля, которое формируется непосредственно в среде (диффузионное излучение). Для этого представим интенсивность в виде суммы двух слагаемых, соответствующих прямому I_* и диффузионному излучениям I_D :

$$I(\tau, \mu, \varphi) = I_*(\tau, \mu, \varphi) + I_D(\tau, \mu, \varphi). \quad (245)$$

Тогда функцию источника также можно представить в виде двух слагаемых:

$$S(\tau, \mu, \varphi) = S_*(\tau, \mu, \varphi) + S_D(\tau, \mu, \varphi), \quad (246)$$

где

$$S_*(\tau, \mu, \varphi) = \lambda \int g(\gamma) I_*(\tau, \mu', \varphi') \frac{d\Omega'}{4\pi}, \quad (247)$$

$$S_D(\tau, \mu, \varphi) = S_0(\tau, \mu, \varphi) + \lambda \int g(\gamma) I_D(\tau, \mu', \varphi') \frac{d\Omega'}{4\pi}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные физические величины, характеризующие перенос излучения.
2. Как изменяется интенсивность излучения при прохождении через вещество?
3. Каков физический смысл функции источника?
4. Что характеризует оптическая толщина среды?

ключение отметим, что, несмотря на разнообразие определений расстояний в космологии, все они совпадают в пределе малых красных смещений $z \ll 1$ и могут быть рассчитаны по формуле (25).

Как отмечалось выше, существует лишь два метода прямого измерения расстояний. Наиболее точный из них — метод лазерного зондирования, когда расстояние до объекта измеряется по времени задержки прихода от него отраженного сигнала. Однако такой метод применим лишь для очень близких объектов, включая Луну. Другой метод прямого измерения расстояний основан на явлении параллакса. За счет годового движения Земли вокруг Солнца видимое положение астрофизических объектов за это время меняется, что получило название годового параллакса. Зная параметры земной орбиты и измерив годовой параллакс объекта, можно вычислить расстояние до него. Применимость данного метода ограничена разрешающей способностью телескопов, и в настоящее время с помощью него удается измерить расстояния, не превышающие $D \sim 1$ кпк, что соответствует достаточно близкой окрестности Солнца в нашей Галактике.

Все остальные способы измерения расстояний в астрофизике и космологии являются косвенными и базируются на понятии так называемой стандартной свечи. Это понятие подразумевает, что существуют объекты, светимость которых является одинаковой во всей Вселенной либо может быть вычислена теоретически. Тогда, зная светимость таких объектов и измеряя их поток, расстояние до них может быть вычислено по формуле (28). На практике, когда какие-то объекты относят к стандартным свечам, то проводится калибровка некоторых из них, то есть определяется их абсолютная светимость по прямым измерениям расстояний либо косвенными методами, основанными на других стандартных свечах. После калибровки всем объектам такого типа приписывается стандартная светимость, а расстояние до них рассчитывается по формуле (28). Исторически названия цефеиды. Хотя они имеют разную светимость, но она однозначно связана с периодом их переменности. Этот факт сначала был получен теоретически, а затем проверен прямыми измерениями расстояний до ближайших цефеид. Существуют и другие стандартные свечи, но наиболее мощными из них на сегодня можно считать сверхновые типа Ia. Данный тип сверхновых представляет из себя термоядерный взрыв белого карлика, вызванный аккрецией на него газа со звезды компаньона. В максимуме блеска, правда, после некоторой коррекции,

учитывающей, что менее слабые сверхновые угасают быстрее, эти объекты являются самыми мощными стандартными свечами из известных на сегодня. Данный метод позволяет определить расстояния на порядки больших масштабах, чем, например, цефеиды, но его минусом является то, что взрывы сверхновых являются достаточно редкими событиями.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные отличия астрофизики и космологии от физики на Земле.
2. Назовите способы наблюдения астрофизических объектов.
3. Каковы основные внесистемные единицы, используемые в астрофизике и космологии?
4. Каковы особенности определения расстояний для больших красных смещений?

Удобно от глубины z перейти к оптической глубине τ . Напомним, что эти величины связаны следующим соотношением

$$\tau = \int_0^z \alpha(z') dz'. \quad (238)$$

Наибольшее значение оптической глубины будет являться для данной задачи оптической толщей

$$\tau_0 = \int_0^{z_0} \alpha(z') dz'. \quad (239)$$

В итоге искомые величины I и ε будут функциями переменных τ , θ и φ .

Для перехода к переменной τ разделим обе части уравнений (235) и (236) на $\alpha(z)$. Получим для первого уравнения

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} = S(\tau, \mu, \varphi) - I(\tau, \mu, \varphi). \quad (240)$$

Второе уравнение может быть представлено в следующем виде

$$S(\tau, \mu, \varphi) = S_0(\tau, \mu, \varphi) + \lambda \int g(\gamma) I(\tau, \mu', \varphi') \frac{d\Omega'}{4\pi}, \quad (241)$$

где

$$S_0 = \frac{\varepsilon^0}{\alpha}, \quad (242)$$

функция источника истинного излучения.

$$\lambda = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma} \leq 1 \quad (243)$$

носит название *вероятности выживания фотона*, либо *альбедо одно-кратного рассеяния*, либо *альбедо частицы*. Будем предполагать, что величина λ не зависит от глубины. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы зависимости коэффициентов рассеяния и истинного поглощения от глубины были одинаковы.

К данным уравнениям необходимо добавить еще граничные условия. Обычно задаются внешние источники излучения, падающие на границы атмосферы извне

$$I(0, \mu, \varphi) = I_0(\mu, \varphi), \quad \mu > 0, \quad (244)$$

$$I(z_0, \mu, \varphi) = I_r(\mu, \varphi), \quad \mu < 0.$$

коэффициенты поглощения, рассеяния и индикатриса. Требуется рассчитать поле излучения внутри среды и вне ее. Для этого необходимо найти совместно интенсивность и коэффициент излучения. Эти величины могут быть найдены в общем случае из уравнения (223), если функцию перераспределения выбрать в виде (231). Однако для астрофизических применений наибольший интерес представляют два случая. В первом из них предполагается, что среда состоит из плоскопараллельных слоев. А во втором случае предполагается, что среда обладает сферической симметрией. Часто внешние слои сферически симметричной среды приближенно можно считать плоскопараллельными. Поэтому в качестве основной мы будем рассматривать задачу о рассеянии в среде, состоящей из плоскопараллельных слоев.

Кроме того, при рассмотрении задачи о монохроматическом рассеянии в классическом ее изложении делаются следующие предположения. Среда считается стационарной. Следовательно, все характеристики излучения и среды не зависят от времени. Делается предположение об изотропии среды. Следовательно, коэффициенты рассеяния и поглощения не зависят от направления. В силу предположения, что среда состоит из плоскопараллельных слоев, коэффициенты поглощения и рассеяния зависят только от одной координаты – глубины z . Кроме того, считается, что интенсивность излучения однородна в горизонтальной плоскости, и, как следствие, можно считать, что она также зависит только от z (рис. 11).

Исходя из указанных выше предположений, уравнение переноса для монохроматического рассеяния можно записать в следующем виде:

$$\mu \frac{dI(z, \mathbf{n})}{dz} = \varepsilon(z, \mathbf{n}) - \alpha(z)I(z, \mathbf{n}), \quad (235)$$

а уравнение для коэффициента излучения записывается как

$$\varepsilon(z, \mathbf{n}) = \varepsilon^0(z, \mathbf{n}) + \sigma(z) \int g(\gamma) I(z, \mathbf{n}') \frac{d\Omega'}{4\pi}, \quad (236)$$

где учтено, что индикатриса рассеяния $g(\mathbf{n}; \mathbf{n}')$ фактически зависит только от угла между векторами \mathbf{n} и \mathbf{n}' (см. (233) и (234)) и $\cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$.

Выразив единичные вектора \mathbf{n} и \mathbf{n}' через соответствующие полярные и азимутальные углы θ, θ' и φ, φ' , выражение для косинуса угла γ можно представить в виде:

$$\cos \gamma = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi'). \quad (237)$$

2 Теория формирования и устойчивости политропных звезд

Как уже отмечалось, гравитационное взаимодействие является самым слабым из всех фундаментальных. Однако если электрические заряды из-за кулоновского взаимодействия имеют тенденцию экранировать друг друга, то гравитация лишь усиливается с ростом массы объекта. Поэтому для массивных тел гравитационные силы становятся доминирующими. Например, динамика Солнечной системы практически полностью определяется гравитацией, и лишь при сближении малых тел с Юпитером и Солнцем на их движении могут сказываться негравитационные эффекты. Кроме привычной на Земле гравитации, выступающей в роли внешней силы, в астрофизике часто важным бывает явление самогравитации. В этом случае гравитационная сила в каждой точке определяется распределением вещества или тел самой системы, и под действием этой же силы происходит их движение. Примером самогравитирующих систем являются галактики и звезды. Однако в последних, кроме самогравитации, оказываются важными силы, связанные с градиентом давления в них. Как будет показано ниже, конкуренция именно между этими силами ответственна за формирование и устойчивость звезд.

2.1 Самогравитирующий газ

Рассмотрим свободный самогравитирующий газ, динамика которого определяется собственным гравитационным полем. На каждый бесконечно малый элемент такого газа dV , расположенный в точке \vec{r} , действуют две силы — гравитационная $\delta \vec{F}_G(\vec{r})$, и сила $\delta \vec{F}_P(\vec{r})$, связанная с давлением газа $P(\vec{r})$. В случае, когда вязкостью можно пренебречь, сила $\vec{F}_P(\vec{r})$ определяется только градиентом давления в газе. Из простейших соображений для нее можно получить следующее выражение:

$$\delta \vec{F}_P(\vec{r}) = - \left(\vec{\nabla} P(\vec{r}) \right) dV. \quad (29)$$

Гравитационная сила определяется суммарным гравитационным воздействием от всех частей системы. В случае непрерывной среды гравитационная сила, действующая на ее элемент dV , может быть получена из закона Ньютона для гравитационного взаимодействия точечных масс: $\vec{F} = -Gm_1m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3$. Интегрирование этого выражения по

всему объему, занимаемому средой, приводит к следующему выражению для гравитационной силы:

$$\delta \vec{F}_G(\vec{r}) = -G\rho(\vec{r}) dV \vec{J}(\vec{r}), \quad \vec{J}(\vec{r}) = \int_{V_m} \frac{\rho(\vec{r}_m)(\vec{r} - \vec{r}_m)}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} dV_m, \quad (30)$$

где V_m – область интегрирования, \vec{r}_m – радиус-вектор точек этой области, $\rho(\vec{r})$ – плотность газа. В случае непрерывной среды удобнее перейти к плотности силы: $\vec{f}(\vec{r}) = \delta \vec{F}(\vec{r})/dV$. Для нее суммарное выражение есть:

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\left(G\rho(\vec{r})\vec{J}(\vec{r}) + \vec{\nabla}P(\vec{r})\right), \quad (31)$$

явный вид которого может быть получен, если известны распределения плотности и давления газа.

Рассмотрим сферически-симметричное распределение газа, для которого интеграл $\vec{J}(\vec{r})$ может быть упрощен. Интегрирование удобно вести в системе отсчета, центр которой совпадает с центром симметрии, а ось OZ_m направлена вдоль вектора \vec{r} . В такой системе координат

$$\vec{r} = r \vec{n}_{z_m}, \quad \vec{r}_m = r_m (\vec{n}_{z_m} \cos \theta_m + (\vec{n}_{x_m} \cos \varphi_m + \vec{n}_{y_m} \sin \varphi_m) \sin \theta_m),$$

где φ_m, θ_m – сферические углы, r и r_m – модули соответствующих векторов. Отсюда получаем

$$|\vec{r} - \vec{r}_m|^2 = r^2 - 2r r_m \cos \theta_m + r_m^2,$$

то есть модуль вектора $\vec{r} - \vec{r}_m$ не зависит от сферического угла φ_m . Таким образом, интегрирование в $J(\vec{r})$ удобно вести в сферической системе координат. Так как распределение газа является сферически-симметричным, то область интегрирования V_m в этом случае будет сфера некоторого радиуса R . Интегрирование по сферическому углу φ_m дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}) &= \int_0^R dr_m r_m^2 \rho(r_m) \int_0^\pi d\theta_m \sin \theta_m \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_m \frac{(r - r_m \cos \theta_m) \vec{n}_{z_m} + r_m (\vec{n}_{x_m} \cos \varphi_m + \vec{n}_{y_m} \sin \varphi_m) \sin \theta_m}{(r^2 - 2r r_m \cos \theta_m + r_m^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi \vec{n}_{z_m} \int_0^R dr_m r_m^2 \rho(r_m) \int_0^\pi d\theta \sin \theta_m \frac{r - r_m \cos \theta_m}{(r^2 - 2r r_m \cos \theta_m + r_m^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Другая важными частными случаями индикатрисы рассеяния являются изотропная

$$g(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) = 1 \quad (233)$$

и дипольная, или рэлеевская,

$$g(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \gamma), \quad (234)$$

где γ – угол между падающим и рассеянным излучением, $\cos \gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$.

4.3 Задача о монохроматическом рассеянии излучения

Рассмотрим задачу о переносе в простейшем случае, когда в ходе рассеяния частота излучения не меняется. Методы решения задач о монохроматическом излучении являются фундаментом для исследования более сложных случаев и интересны, в том числе, с методологической точки зрения. Иногда задачу о монохроматическом рассеянии еще называют *задачей о серой атмосфере*.

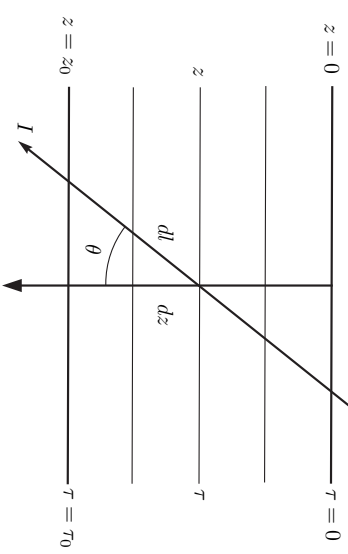


Рис. 11. К задаче о монохроматическом рассеянии излучения

Так как частота излучения не меняется в ходе рассеяния, ее можно фиксировать и рассматривать задачу для каждой частоты отдельно. В силу этого мы будем не указывать частоту в качестве аргумента исходных характеристик задачи и вместо, например, I_ν писать просто I .

Задача ставится следующим образом. Пусть имеется среда определенной формы и определенных размеров. На среду действуют источники излучения, расположение и мощность которых заданы. В среде происходит поглощение и рассеяние излучения, причем считаются известными

Интегрируя обе части уравнения (226) по всем частотам и направлениям, получим соотношение, выражающее баланс энергии:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \int \left[\epsilon_\nu^0 \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) - \kappa_\nu I_\nu \right] d\nu d\Omega, \quad (228)$$

где ε и \mathcal{F} – интегральные плотность энергии и поток

$$\varepsilon = \int \varepsilon_\nu d\nu, \quad \mathcal{F} = \int \mathcal{F}_\nu d\nu. \quad (229)$$

Заметим, что при интегрировании уравнения (226) по ν и Ω часть уравнения переноса, описывающая рассеяние, сокращается в силу симметрии. Таким образом, процессы рассеяния не влияют на баланс энергии излучения в среде.

Решение уравнения переноса (226) представляет собой довольно сложную математическую задачу. Однако рассмотрение задачи о переносе излучения с такой степенью общности и точности требуется не всегда. На практике часто для качественного анализа или в рамках первого приближения при учете процессов рассеяния рассматривают два случая.

В задачах о переносе излучения в линиях предполагают, что корреляций между частотами падающих и рассеянных фотонов в первом приближении можно пренебречь. Тогда функцию перераспределения можно представить как произведение профилей падающих и рассеянных фотонов:

$$R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) = \phi_{\nu'}(\mathbf{n}') \phi_\nu(\mathbf{n}). \quad (230)$$

В таком случае говорят, что имеет место *полное перераспределение по частотам*, или *полная некогерентность*.

В противоположном случае, наоборот, предполагается, что частота в процессе рассеяния излучения практически не меняется, а важную роль играет перераспределение испускаемого излучения по углам. Такая ситуация реализуется при рассмотрении рассеяния света на флуктуациях плотности или на крупных частицах (пылинках), а также в случае рассеяния на электронах, когда такое рассеяние можно рассматривать в томновском приближении. Функцию перераспределения в таком случае можно записать как

$$R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} g(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) \phi_\nu \delta(\nu' - \nu), \quad (231)$$

где $g(\mathbf{n}'; \mathbf{n})$ называется *индикатрисой рассеяния*. Она имеет следующую нормировку:

$$\frac{1}{4\pi} \int g(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) d\Omega' = 1. \quad (232)$$

Для дальнейшего интегрирования удобно перейти к новым безразмерным переменным $x = r_m/r$, $\chi = \cos \theta_m$. В этих переменных

$$\vec{J}(\vec{r}) = 2\pi \vec{r} \int_0^{R/r} dx x^2 \rho(x) \int_{-1}^1 d\chi \frac{1-x\chi}{(1-2x\chi+x^2)^{3/2}}. \quad (32)$$

Интегрирование по χ элементарно, если сделать замену $z = 1 - 2x\chi + x^2$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1-x\chi}{(1-2x\chi+x^2)^{3/2}} d\chi &= \frac{1}{4x} \int_{(1-x)^2}^{(1+x)^2} \frac{z+1-x^2}{z^{3/2}} dz = \\ &= \frac{1}{2x} \left(z^{1/2} - \frac{1-x^2}{z^{1/2}} \right) \Big|_{(1-x)^2}^{(1+x)^2} = \frac{1}{2x} \left((1+x) - |1-x| - \right. \\ &\quad \left. - (1-x) + \frac{1-x^2}{|1-x|} \right) = 1 + \frac{1-x}{|1-x|} = 2 \Theta(1-x). \end{aligned}$$

Таким образом, при сферически-симметричном распределении газа получаем следующее окончательное выражение:

$$\vec{J}(\vec{r}) = 4\pi \vec{r} \int_0^{R/r} x^2 \rho(x) \Theta(1-x) dx = 4\pi \frac{\vec{r}}{r^3} \int_0^R r_m^2 \rho(r_m) \Theta(r-r_m) dr_m, \quad (33)$$

Оно показывает, что на точку внутри сферически-симметричного распределения вещества, когда $r < R$, внешние области не оказывают гравитационного воздействия. Действительно, сравним полученное выражение с выражением для массы газа, заключенного внутри шара радиуса r :

$$M(r) = \int_{V_m(r)} \rho(\vec{r}_m) dV_m = 4\pi \int_0^r r_m^2 \rho(r_m) \Theta(R-r_m) dr_m, \quad (34)$$

где Θ -функция введена, чтобы явно показать, что газ отсутствует вне области радиуса R . Таким образом, при сферически-симметричном распределении газа получаем плотность гравитационной силы в следующем виде:

$$\vec{f}_P(\vec{r}) = -G \frac{\rho(\vec{r}) M(r)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (35)$$

Как видно, данное выражение совпадает с законом Ньютона для точечных частиц, в роли одной из которых здесь выступает вещество, заключенное внутри радиуса r .

Выражение для силы, связанной с давлением газа, при его сферически-симметричном распределении, также упрощается. Как известно, градиент в сферической системе координат имеет следующий вид:

$$\vec{\nabla} = \vec{n}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{n}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{n}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Так как давление газа зависит только от радиальной координаты r , то вклад в плотность силы даст лишь первое слагаемое:

$$\vec{f}^p(\vec{r}) = -\frac{dP(r)}{dr} \vec{r}. \quad (36)$$

Таким образом, суммарная плотность силы при сферически-симметричном распределении газа можно представить в следующем виде:

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\vec{r} \left(G \frac{\rho(r) M(r)}{r^2} + \frac{dP(r)}{dr} \right) \quad (37)$$

где $M(r)$ – масса газа, заключенная внутри сферы радиуса r . Напомним, что данное выражение приведено в системе координат, начало которой находится в центре симметрии.

2.2 Гравитационная неустойчивость

Как известно, ньютоновская теория гравитации неприменима в случае бесконечного распределения вещества, если его плотность спадает на бесконечности как $\rho \sim r^{-2}$ или медленнее. Это связано с тем, что интеграл, определяющий гравитационный потенциал в этом случае, является расходящимся, а гравитационная сила неопределенной. В литературе этот факт известен как гравитационный парадокс, или парадокс Неймана - Зеелигера. В общей теории относительности однородное и изотропное распределение вещества во Вселенной приводит к ее нестационарности (однородному расширению или сжатию). Таким образом, вопрос о неустойчивости самогравитирующего газа в общем случае должен решаться с учетом того, что Вселенная расширяется. Однако в этом разделе мы будем предполагать, что таким расширением можно пренебречь. Это означает, что бесконечное однородное распределение вещества без

В общем случае, когда в среде происходит не только рассеяние, но и собственное излучение, вместо (221) следует использовать выражение:

$$\epsilon_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \epsilon_\nu^0(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + \sigma(\mathbf{r}) \int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\nu' d\Omega', \quad (222)$$

где ϵ_ν^0 – коэффициент истинного излучения.

Подставляя полученное выражение в уравнение переноса

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = \epsilon_\nu^0 + \sigma(\mathbf{r}) \int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) I_\nu d\nu' d\Omega' - (\kappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu, \quad (223)$$

видим, что учет рассеяния в задаче о переносе излучения приводит к интегро-дифференциальному уравнению. Уравнение (223) можно записать в более симметричной форме, если соотношение $\sigma_\nu = \sigma(\mathbf{r}) \phi_\nu$ представить в следующем виде

$$\sigma_\nu = \sigma(\mathbf{r}) \int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) d\nu' d\Omega. \quad (224)$$

Если теперь в интеграле (224) нештрихованные переменные интегрирования заменить на штрихованные и подставить получившееся выражение в (223), получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = -\kappa_\nu I_\nu + \epsilon_\nu^0 + \sigma(\mathbf{r}) \int (R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) I_\nu - R_{\nu\nu'}(\mathbf{n}; \mathbf{n}') I_\nu) d\nu' d\Omega'. \quad (225)$$

Следует отметить, что если поле излучения достаточно сильно, то в описании процесса переноса излучения также необходимо учитывать эффект вынужденного излучения. Формально такой учет состоит в умножении слагаемых в уравнении переноса, относящихся к излучению, на множитель $(1 + f)$. Выражая функцию распределения фотона через интенсивность с помощью (155), окончательно получим уравнение переноса в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = -\kappa_\nu I_\nu + \epsilon_\nu^0 \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right) + \quad (226)$$

$$+ \sigma(\mathbf{r}) \int \left[R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) I_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I_\nu \right) - R_{\nu\nu'}(\mathbf{n}; \mathbf{n}') I_\nu \left(1 + \frac{c^2}{2h\nu'^3} I_\nu \right) \right] d\nu' d\Omega'. \quad (227)$$

Величина $\phi_{\nu'}(\mathbf{n}')d\nu'd\Omega'$ имеет смысл вероятности поглощения в процессе рассеяния излучения, падающего в направлении \mathbf{n}' в пределах телесного угла $d\Omega'$ с частотой в интервале $(\nu', \nu' + d\nu')$. Очевидно, что функция $\phi_{\nu'}(\mathbf{n}')$ нормирована как

$$\int \phi_{\nu'}(\mathbf{n}')d\nu'd\Omega' = 1 \quad (216)$$

В разделе 4.2.2 введен спектральный коэффициент рассеяния $\sigma_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$, являющийся составной частью коэффициента поглощения. Определим теперь интегральный коэффициент $\sigma(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \int \sigma_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{n})d\nu d\Omega. \quad (217)$$

Тогда с учетом нормировки (216) мы можем написать подынтегральную функцию как $\sigma_{\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') = \sigma(\mathbf{r})\phi_{\nu'}(\mathbf{n}')$. Количество энергии, которая в процессе рассеяния излучения с частотой ν' будет поглощена единичным объемом в единицу времени, будет:

$$\begin{aligned} dE_{\nu'} &= \sigma_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{n}')I_{\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{n}')d\nu'd\Omega' = \\ &= \sigma(\mathbf{r}) \left[\int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n})I_{\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{n}')d\nu'd\Omega' \right] d\nu'd\Omega'. \end{aligned} \quad (218)$$

Чтобы найти энергию, которая будет в процессе рассеяния испущена единичным объемом в единицу времени, нужно в (218) вместо интегрирования по частоте и телесному углу конечных фотонов произвести интегрирование по всем начальным углам и частотам

$$dE_{\nu} = \sigma(\mathbf{r}) \left[\int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n})I_{\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{n}')d\nu'd\Omega' \right] d\nu d\Omega. \quad (219)$$

С другой стороны, та же самая энергия в отсутствие иных процессов излучения, кроме рассеяния, может быть выражена через коэффициент излучения:

$$dE_{\nu} = \epsilon_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{n})d\nu d\Omega. \quad (220)$$

Приравнявая эти выражения, найдем, что

$$\epsilon_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{r}) \int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n})I_{\nu'}(\mathbf{r}, \mathbf{n}')d\nu'd\Omega'. \quad (221)$$

возмущения находится в статическом равновесии. Таким образом, в этом подходе мы должны постулировать, что

$$\vec{f}_0(\vec{r}) \equiv 0, \quad (38)$$

где $\vec{f}_0(\vec{r})$ – плотность силы в отсутствие возмущения. Для правильно-го понимания этого постулата следует воспринимать суммарную силу, действующую на элемент среды, как создаваемую не только градиентом давления в газе $\vec{f}_P(\vec{r})$ и его самогравитацией $\vec{f}_G(\vec{r})$, но и некоторой внешней силой $\vec{f}_{ext}(\vec{r})$:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}_G(\vec{r}) + \vec{f}_P(\vec{r}) + \vec{f}_{ext}(\vec{r}). \quad (39)$$

Такой подход к этой задаче позволяет избежать проблем с граничными условиями, которые существенно могут влиять на ответ. А кроме того, дает правильное понимание развития гравитационной неустойчивости, формирующей, к примеру, звезды. Следовательно, в таком подходе условие (38) нужно воспринимать не как некое предположение, а как определение силы $\vec{f}_{ext}(\vec{r})$, удерживающей газ в статическом равновесии при отсутствии в нем возмущений.

Будем рассматривать развитие гравитационной неустойчивости в случае сферически-симметричного возмущения. Кроме того, будем предполагать возмущение малым. Таким образом, если первоначальное распределение газа определяется как

$$\rho_0(\vec{r}) = \rho_0, \quad P_0(\vec{r}) = P_0, \quad (40)$$

то в присутствии возмущения он будет

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 + \delta\rho(r), \quad P(\vec{r}) = P_0 + \delta P(r), \quad (41)$$

причем малость возмущений подразумевается, что

$$\delta\rho(r) \ll \rho_0, \quad \delta P(r) \ll P_0. \quad (42)$$

Будем предполагать, что вследствие малости возмущения, его влияние не изменяет внешней силу. Тогда она, действительно, определяется из условия (38) и дается выражением:

$$\vec{f}_{ext}(\vec{r}) \simeq \vec{f}_{ext,0}(\vec{r}) = -\vec{f}_{G,0}(\vec{r}) - \vec{f}_{P,0}(\vec{r}), \quad (43)$$

где под $\vec{f}_{G,0}$ и $\vec{f}_{P,0}$ понимаются силы в отсутствие возмущения. В этом случае суммарная плотность силы в присутствии возмущения есть

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{r}) &= \vec{f}_G(\vec{r}) + \vec{f}_P(\vec{r}) + \vec{f}_{ext}(\vec{r}) \simeq \vec{f}_G(\vec{r}) + \vec{f}_P(\vec{r}) - \vec{f}_{G,0}(\vec{r}) - \vec{f}_{P,0}(\vec{r}) = \\ &= -\frac{\vec{r}}{r} \left(G \left[\frac{\rho(r)}{r^2} \left(M_0(r) + \delta M(r) \right) - \rho_0 M_0(r) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dr} \left[P(r) - P_0(r) \right] \right) \simeq \\ &\simeq -\frac{\vec{r}}{r} \left(G \frac{\rho_0 \delta M(r)}{r^2} + \frac{d}{dr} \left[\delta P(r) \right] \right) \equiv \vec{f}_{G,\delta}(\vec{r}) + \vec{f}_{P,\delta}(\vec{r}),\end{aligned}\quad (44)$$

$$\text{где } M(r) = \int_{V_m} \rho(r_m) dV_m = \int_{V_m} \rho_0 dV_m + \int \delta \rho(r) dV_m \equiv M_0(r) + \delta M(r).$$

Отметим, что в конечном выражении для $\vec{f}(\vec{r})$ были отброшены члены $\sim \delta \rho^2$, а под $\vec{f}_{G,\delta}(\vec{r})$ и $\vec{f}_{P,\delta}(\vec{r})$ понимаются соответствующие вклады в суммарную силу только от самого возмущения.

Таким образом, задача об эволюции возмущения в газе, удерживаемом в равновесии внешними силами, эквивалентна задаче об эволюции исключительно самого возмущения без учета остальной среды. Это может показаться странным, так как рассматриваются малые возмущения, вклад в силы от которых мал по сравнению с вкладом среды: $\vec{f}_{G,\delta}(\vec{r}) \ll \vec{f}_G(\vec{r})$, $\vec{f}_{P,\delta}(\vec{r}) \ll \vec{f}_P(\vec{r})$. Однако следует понимать, что эти силы, включая внешние, уравновешивают друг друга, и эволюции возмущения, действительно, определяется лишь $\vec{f}_{G,\delta}(\vec{r})$ и $\vec{f}_{P,\delta}(\vec{r})$.

Очевидно, что для получения явного выражения плотности силы, действующей на элемент возмущенной среды, необходимо задать вид возмущения плотности и давления. Будем считать, что среда является идеальным газом с уравнением состояния $P = nkT$ и имеет постоянную температуру $T(r) = T_0$. В этом случае

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r} \left(G \frac{\rho_0 \delta M(r)}{r^2} + \frac{kT}{m} \frac{d}{dr} \left[\delta \rho(r) \right] \right), \quad (45)$$

где m – масса частиц газа. Если возмущение имеет амплитуду $\delta \rho_0 > 0$ и радиус R , то очевидно, что силы, действующие на границу возмущения, есть $f_{\rho,\delta}(R) \sim \delta \rho_0 / R$, $f_{G,\delta}(R) \sim -\delta \rho_0 R$ (так как $M(R) \sim R^3$) и направлены в разные стороны. Таким образом, сила, связанная с давлением, стремится расширить возмущение, а гравитационная сила – увеличить

l и ослабленной вследствие поглощения на отрезке от точки испускания l' до места наблюдения l .

4.2.7 Учет рассеяния света

До сих пор мы неявно предполагали, что при прохождении излучения в среде реализуется случай только истинного поглощения и пренебрегли учетом ситуации, когда излучение может вновь излучаться, т. е. когда в среде происходит рассеяние излучения. В этом случае задача существенно усложняется. Дело в том, что коэффициент излучения зависит от интенсивности излучения, которое падает со всех сторон на элементарный объем. В свою очередь, интенсивность излучения зависит от значения коэффициента излучения вдоль луча. В итоге задача сводится к одновременноному нахождению двух функций: интенсивности I_ν и коэффициента излучения ϵ_ν .

Для математической формулировки указанной задачи необходимо задать закон рассеяния излучения. Для простоты запишем в дальнейшем мы везде будет опускать t , хотя в общем случае все параметры могут зависеть от времени. Нужно иметь в виду, что при рассеянии могут измениться как частота, так и направление излучения. Для описания этих изменений вводят *функцию перераспределения* $R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n})$, такую что

$$R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) d\nu' d\Omega' d\nu d\Omega \quad (213)$$

представляет собой совместную вероятность того, что фотон с частотой в интервале $(\nu', \nu' + d\nu')$, распространявшийся в пределах телесного угла $d\Omega'$ в направлении \mathbf{n}' , после рассеяния окажется в пределах телесного угла $d\Omega$ около направления \mathbf{n} в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$. Из данного определения вытекает, что функция $R_{\nu'\nu}$ должна быть нормирована следующим образом:

$$\int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) d\nu' d\Omega' d\nu d\Omega = 1. \quad (214)$$

Если функцию $R_{\nu'\nu}$ проинтегрировать только по частоте и телесному углу, которые соответствуют конечным фотонам, мы получим так называемый нормированный профиль поглощения для процесса рассеяния:

$$\phi_\nu(\mathbf{n}) = \int R_{\nu'\nu}(\mathbf{n}'; \mathbf{n}) d\nu d\Omega. \quad (215)$$

При прохождении излучением единичной оптической толщи интенсивность уменьшается в e раз. Если $\tau_\nu \gg 1$, то реализуется случай оптически толстой среды, при котором вещество непрозрачно для излучения. При $\tau_\nu \ll 1$ говорят, что среда оптически тонкая, то есть прозрачна для излучения.

Иногда отсчет расстояния ведется в обратном направлении, тогда в определении (209) появляется знак минус и говорят об *оптической глубине*.

Оптическая толщина определяется длиной свободного пробега фотона. Среднюю длину свободного пробега можно определить из условия $\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu \langle l_\nu \rangle = 1$,

$$\langle l_\nu \rangle = \frac{1}{\alpha_\nu}. \quad (210)$$

Таким образом средняя длина свободного пробега – это обратный коэффициент поглощения. Тогда оптическая толщина – это расстояние, выраженное в длинах свободного пробега фотона частоты ν .

Стационарное уравнение переноса оказывается удобно выразить через переменную τ_ν . Используя, что $d\tau_\nu = \alpha_\nu dl$, получаем:

$$\frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mathbf{n})}{d\tau_\nu} = S_\nu(\tau_\nu) - I_\nu(\tau_\nu, \mathbf{n}). \quad (211)$$

В общем случае, когда в среде есть как излучение, так и поглощение, решение стационарного уравнения переноса имеет следующий вид:

$$I_\nu(l) = I_\nu(0) \exp \left[- \int_0^l \alpha_\nu(t') dl' \right] + \int_0^l \epsilon_\nu(t') \exp \left[- \int_{t'}^l \alpha_\nu(t'') dt'' \right] dl'. \quad (212)$$

Решение (212) называется *формальным решением* уравнения переноса, так как предполагается, что коэффициенты α_ν и ϵ_ν заданы. Как мы увидим позднее, в большинстве случаев, реализующихся в астрофизических условиях, это не так. Дело в том, что коэффициенты поглощения и излучения сами могут зависеть от интенсивности. Тем не менее, когда можно считать α_ν и ϵ_ν заданными, формула (212) полностью описывает поле излучения.

Как видно, решение (212) состоит из двух слагаемых, первое из которых описывает ослабление интенсивности начального излучения $I_\nu(0)$ вследствие поглощения на отрезке от 0 до l . Второе слагаемое соответствует интенсивности, обусловленной излучением среды на пути от 0 до

неоднородность. При этом гравитационная сила преобладает в возмущениях больших размеров, а сила, связанная с давлением, наоборот, доминирует в маленьких. Следовательно, существует критический радиус возмущения R_0 , соответствующий равенству гравитационной силы и силы, связанной с давлением:

$$\vec{f}(R_0) = 0. \quad (46)$$

Возмущения, имеющие меньшие размеры ($R < R_0$), будут расширяться и порождать в среде звуковые волны. Возмущения, превышающие критический размер ($R > R_0$), будут экспоненциально усиливаться. В рассматриваемом подходе критический размер возмущения будет зависеть от его пространственного профиля. Так, в простейшем случае линейного возмущения с амплитудой $\delta\rho_0$:

$$\delta\rho_1 = \delta\rho_0 \left(1 - r/R \right) \Theta(R - r), \quad (47)$$

получаем следующее выражение для плотности силы, действующей на произвольную его точку:

$$\vec{f}_1(r) = \frac{\vec{r}}{r} \delta\rho_0 \left(\frac{kT}{mR} - \frac{4\pi G}{3} \rho_0 r (1 - 3r/(4R)) \right). \quad (48)$$

Из условия (46) следует, что критический радиус такого возмущения есть:

$$R_{01}^2 = \frac{3}{\pi} \frac{kT}{Gm\rho_0} = \frac{3}{\pi} \frac{v_s^2}{G\rho_0} \simeq \frac{v_s^2}{G\rho_0}, \quad (49)$$

где v_s – скорость звука в среде, определяемая как $v_s^2 = \partial P / \partial \rho|_{S=const} = kT/m$. Отметим, что выражение для критического радиуса через скорость звука является более универсальным, так как не предполагает использование нами уравнения состояния идеального газа. В частности, оно справедливо, например, в случае ультрарелятивистского газа, давление которого определяется только его температурой $P \sim T^4$.

Строгое решение данной задачи впервые было получено Дж. Джинсом в 1902 году. Им рассматривалась однородная самогравитирующая среда в состоянии покоя, описываемая одномерными уравнениями Эйлера и Пуассона. Линеаризованная система этих уравнений в случае полнотного уравнения состояния газа $P = K\rho^\gamma$ может быть приведена к следующему виду [4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F_G - \frac{v_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_G}{\partial x} = -4\pi G\rho, \quad (50)$$

где u – скорость среды, v_s – скорость звука в политропном газе, F_g – гравитационная сила. Отметим, что данная система уравнений соответствует одномерной, а не сферически симметричной задаче. То есть координата x здесь не является радиальной координатой r . Опуская подробности, отметим, что решение этой системы уравнений для плотности газа может быть найдено в виде:

$$\rho(x, t) \sim e^{i(\omega t + kx)}, \quad \omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (51)$$

Таким образом, решения для больших k ($\omega^2 > 0$) представляют из себя коротковолновые звуковые колебания, а малым k ($\omega^2 < 0$) соответствуют экспоненциально растущие возмущения. Критическая длина волны λ_J , соответствующая $\omega = 0$, определяется следующим соотношением:

$$\lambda_J^2 = \pi \frac{v_s^2}{G \rho_0}. \quad (52)$$

Приведенное выражение для джинсовской длины волны λ_J соответствует одномерному пространственно-периодическому решению, растущему со временем. Следовательно, линейный размер растущего возмущения (полювина λ_J соответствует области, плотность которой уменьшается, поставляя вещество в растущую область) есть

$$L_J^2 = \lambda_J^2 / 4 = \frac{\pi}{4} \frac{v_s^2}{G \rho_0} \simeq \frac{v_s^2}{G \rho_0}. \quad (53)$$

Отметим, что данное выражение с точностью до коэффициента совпадает с выражением (49), полученным из более простых соображений.

Так как начальный размер возмущения, растущего за счет гравитационной неустойчивости, с течением времени может изменяться, то вместо него удобно использовать минимальную массу, гарантирующую рост возмущения в среде:

$$M_J = \rho_0 L_J^3 \simeq \frac{v_s^3}{G^{3/2} \rho_0^{1/2}}. \quad (54)$$

Эта масса получила название джинсовской. Следовательно, возмущения, имеющие небольшую массу $M < M_J$, будут порождать в среде звуковые волны, а более массивные возмущения с $M > M_J$ будут расти из-за гравитационной неустойчивости.

Как видно из полученных выражений, развитие гравитационной неустойчивости наиболее чувствительно к скорости звука в среде. В нерелятивистском идеальном газе она определяется как $v_s = \sqrt{kT/m}$, затем быстро растет, когда среда становится релятивистской, и достигает

анизотропно и сильно отличается от равновесного. Во многих случаях состояние вещества зависит от поля излучения, вследствие чего соотношение (204) перестает выполняться.

4.2.6 Решение уравнения переноса

Рассмотрим вначале некоторые частные случаи уравнения переноса излучения. Ограничимся пока рассмотрением стационарного поля излучения. Если поглощение и излучение в среде отсутствуют ($\alpha_\nu = 0$ и $\epsilon_\nu = 0$), то уравнение переноса становится

$$\frac{dI_\nu}{dl} = 0. \quad (205)$$

Иными словами, удельная интенсивность постоянна вдоль направления распространения излучения, что совпадает с результатом, полученным нами в разделе 4.1.2.

Если среда только излучает, то $\alpha_\nu = 0$, $dI_\nu/dl = \epsilon_\nu$,

$$I_\nu(l) = I_\nu(0) + \int_0^l \epsilon_\nu(l') dl' \quad (206)$$

где $I_\nu(0)$ – интенсивность перед входом в среду.

Предположим теперь, что в среде может происходить поглощение излучения, но нет излучения ($\alpha_\nu \neq 0$, а $\epsilon_\nu = 0$). Будем также полагать, что рассеяние в среде отсутствует и имеет место случай истинного поглощения ($\alpha_\nu = \lambda_\nu$). Тогда вместо уравнения (189) имеем:

$$\frac{dI_\nu}{dl} = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (207)$$

Интегрирование уравнения дает:

$$I_\nu(l) = I_\nu(0) \exp \left[- \int_0^l \alpha_\nu(l') dl' \right] \quad (208)$$

где $I_\nu(0)$ – интенсивность излучения в точке $l = 0$.

Безразмерная величина, стоящая в экспоненте в (208), характеризует поглощение вдоль луча распространения излучения и называется *оптической расстоянием*, или *оптической толщиной*

$$\tau_\nu = \int_0^l \alpha_\nu(l') dl'. \quad (209)$$

где мы ввели величину $S_\nu = \epsilon_\nu/\alpha_\nu$, которая носит название *функция источника*. Выясним ее физический смысл. Для этого рассмотрим распространение излучения через вещество, находящееся с ним в состоянии термодинамического равновесия. В этом случае левая часть уравнения (200) тождественно равна нулю. Тогда получаем, что

$$I_\nu = S_\nu. \quad (201)$$

В случае строгого термодинамического равновесия интенсивность излучения равна функции Планка $B_\nu(T)$

$$S_\nu = I_\nu = B_\nu(T). \quad (202)$$

Воспользовавшись определением функции источника, последнее соотношение можно представить в виде:

$$\epsilon_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T). \quad (203)$$

Это соотношение носит название *закон Кирхгофа*. Оно верно для любого вещества, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, и позволяет выразить излучательную способность вещества через коэффициент поглощения.

При термодинамическо равновесии в веществе устанавливается детальный баланс между прямыми и обратными процессами, происходящими в веществе. При этом состояние среды характеризуется только одним значением температуры. В астрофизических задачах, связанных с явлением переноса излучения, вводится приближение *локального термодинамического равновесия* (ЛТР). Предполагается, что в случае, когда изменение параметров среды мало, на расстояниях, которые может пройти фотон прежде чем будет поглощен, можно считать, что локально вещество находится в состоянии термодинамического равновесия, но температура будет являться функцией координат и времени. Другими словами, в предположении ЛТР считается, что закон Кирхгофа выполняется локально

$$\epsilon_\nu(\mathbf{r}, t) = \alpha_\nu(\mathbf{r}, t) B_\nu(T(\mathbf{r}, t)). \quad (204)$$

При этом интенсивность излучения может отличаться от локального значения $B_\nu(T(\mathbf{r}, t))$ и находится решением уравнения переноса.

Необходимо понимать, что приближением ЛТР можно пользоваться не всегда. Так, например, в звездных атмосферах реализуются условия с резкими градиентами параметров среды. Кроме того, имеется граница, через которую вещество выходит наружу. В этом случае излучение

своего предельного значения $v_s = c/\sqrt{3}$ в ультрарелятивистском случае. Следовательно, развитие гравитационной неустойчивости затруднительно в релятивистской среде, так как требует возникновения в ней больших возмущений, вероятность которых мала. Действительно, например, джинсовская масса для ультрарелятивистского газа, имеющего плотность, равную средней плотности Солнца $\rho_\odot \simeq 1 \text{ г/см}^3$, есть $M_{J,\odot} \simeq 8 \times 10^8 M_\odot$, что сравнимо с небольшой галактикой. Оценка джинсовской массы на момент, предшествующий рекомбинации, когда вещество еще было связано с излучением и среда была релятивистской, дает значения близкие к массе, заключенной внутри горизонта событий на эту эпоху. Таким образом, хотя возникновение гравитационной неустойчивости в релятивистском газе теоретически возможно, оно вряд ли имело место в нашей Вселенной. Напротив, оценки джинсовской массы для нерелятивистского вещества хорошо согласуются с известными во Вселенной структурами. Например, после рекомбинации, когда вещество стало нерелятивистским, минимальная масса, гарантирующая развитие гравитационной неустойчивости составляла $M_{J,rec} \simeq 10^5 M_\odot$, что хорошо согласуется с массами шаровых скоплений. Другим примером является образование звезд в диске спиральных галактик. Как известно, звезды в них образуются в молекулярных облаках, структура которых достаточно сложна. Однако наиболее плотные и холодные их области имеют характерную плотность $\rho_{H_2} \simeq 10^{-16} \text{ г/см}^3$ ($n_{H_2} \simeq 300 \text{ см}^{-3}$) и температуру $T_{H_2} \simeq 10 \text{ К}$. Таким значениям параметров среды соответствует джинсовская масса $M_{J,H_2} \simeq 0.8 M_\odot$, что хорошо коррелирует с массами образующихся звезд.

2.3 Статическая конфигурация

Развитие гравитационной неустойчивости заканчивается тем, что первичное возмущение нарастает и полностью отделяется от остальной среды, так как плотность его становится существенно выше первоначальной. При этом в газе устанавливается статическая конфигурация, в которой силы гравитации уравниваются силами, связанными с давлением. Будем предполагать, что такая конфигурация является сферически симметричной, то есть пренебрегать влиянием вращения и магнитного поля. Тогда из выражения для плотности сил (37), действующей в таком газе,

следует условие, которое должно выполняться в любой его точке:

$$\vec{f}(r) = -\frac{\vec{r}}{r} \left(G \frac{\rho(r) M(r)}{r^2} + \frac{dP(r)}{dr} \right) = 0, \quad (55)$$

которое должно выполняться в любой точке равновесной конфигурации. Так как в это уравнение входят две неизвестные функции $\rho(r)$ и $P(r)$, то, очевидно, одного этого уравнения недостаточно для описания равновесия в газе. Следовательно, уравнение гидростатического равновесия должно быть дополнено уравнением состояния газа, связывающего его давление с плотностью. Наиболее известным уравнением такого типа является политропное уравнение состояния:

$$P = K \rho^\gamma, \quad (56)$$

где безразмерный параметр γ называется показателем политропы и определяется типом газа, а коэффициент K имеет размерность, зависящую от γ и характеризует величину давления для данного типа газа. Хотя не все газы могут быть описаны политропным уравнением состояния, существует ряд интересных с физической точки зрения случаев, когда такое описание возможно. Так, например, идеальному одноатомному газу соответствует $\gamma = 5/3$, а ультрарелятивистскому газу $\gamma = 4/3$. Отметим, что впервые такой подход к описанию равновесия в звездах был предложен Р. Эдменом в 1907 году. С учетом такого уравнения состояния, условие гидростатического равновесия может быть записано в следующем виде:

$$G \frac{\rho(r) M(r)}{r^2} + \gamma K \rho(r)^{\gamma-1} \frac{d\rho(r)}{dr} = 0, \quad (57)$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r_m^2 \rho(r_m) \Theta(R - r_m) dr_m.$$

Хотя это уравнение содержит лишь одну неизвестную функцию $\rho(r)$, оно является интегро-дифференциальным. Чтобы привести его к виду обычного дифференциального уравнения, можно воспользоваться соотношением $dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho(r)$. Тогда уравнение гидростатического равновесия запишется как:

$$4\pi G r^2 \rho(r) = -\gamma K \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho(r)^{\gamma-2} \frac{d\rho(r)}{dr} \right]. \quad (58)$$

Данное уравнение может быть упрощено, если перейти к новой безразмерной переменной $y(r)$, определяемой условием $\rho(r) = \rho_0 y(r)^n$, и брать параметр n таким образом, чтобы сделать в уравнении степень

Выражения для производных dr/dl и $d\theta/dl$ можно получить и другим способом. Заметим, что $l = r \cos \theta$, а $r \sin \theta = r_0 = \text{const}$, где r_0 – расстояние до луча l . Тогда мы можем записать следующие соотношения:

$$r = \sqrt{r_0^2 + l^2}, \quad \theta = \arctg \frac{r_0}{l}. \quad (194)$$

Дифференцируя (194) по l , получаем:

$$\frac{dr}{dl} = \frac{l}{\sqrt{r_0^2 + l^2}} = \frac{l}{r} = \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{1 + r_0^2/l^2} \frac{-r}{l^2} = -\frac{r_0}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}. \quad (195)$$

Таким образом, уравнение переноса для задачи со сферической симметрией имеет вид

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) I_\nu(r, \mu, t) = \epsilon_\nu(r, t) - \alpha_\nu(r, t) I_\nu(r, \mu, t). \quad (196)$$

4.2.4 Связь уравнения переноса с уравнением Больцмана

В разделе 4.1.2 мы нашли связь между спектральной интенсивностью излучения и функцией распределения фотонов. Подставив выражение (155) в уравнение переноса (190), получим уравнение для функции распределения в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \mathbf{n} \cdot \nabla f = \frac{c^3 \epsilon_\nu}{2h\nu^3} - c \alpha_\nu f. \quad (197)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f + (\mathbf{F} \cdot \nabla_p) f = \text{St} f, \quad (198)$$

найдем, что уравнение переноса излучения является не чем иным, как уравнением Больцмана для газа, состоящего из фотонов, двигающихся вдоль прямых со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{c} \mathbf{n}$, в отсутствие внешних сил $\mathbf{F} = 0$. При этом интеграл столкновений $\text{St} f$ равен

$$\text{St} f = \frac{c^3 \epsilon_\nu}{2h\nu^3} - c \alpha_\nu f. \quad (199)$$

4.2.5 Функция источника и локальное термодинамическое равновесие

Перепишем уравнение переноса (189) в следующем виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial l} = \alpha_\nu (S_\nu - I_\nu), \quad (200)$$

Для задачи об одномерной плоской атмосфере, отличной от нуля, является только производная $\partial I_\nu / \partial z$. В этом случае для уравнения переноса получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(z, \mathbf{n}, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\nu(z, \mathbf{n}, t)}{\partial z} = \epsilon_\nu(z, \mathbf{n}, t) - \alpha_\nu(z, \mathbf{n}, t) I_\nu(z, \mathbf{n}, t). \quad (191)$$

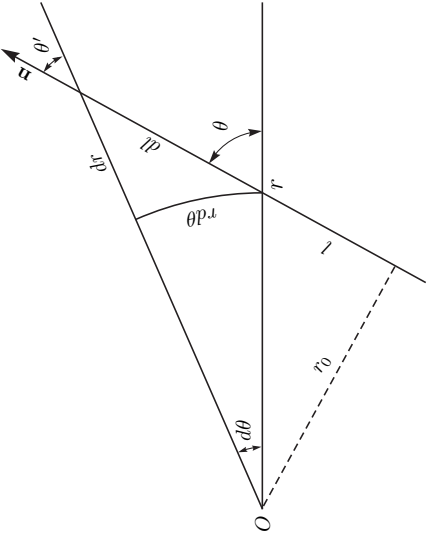


Рис. 10. Геометрические соотношения, используемые при выводе уравнения переноса излучения в сферически симметричном веществе

Для случая сферической геометрии интенсивность как функция координат текущей точки зависит только от модуля радиуса-вектора. Направление излучения удобно рассматривать по отношению к радиус-вектору. Если положить $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \cos \theta = \mu$ ($\hat{\mathbf{r}}$ – единичный радиус-вектор), то спектральная интенсивность излучения в этом случае будет функцией времени и двух переменных r и μ . Производную по направлению тогда можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial l}. \quad (192)$$

Из геометрических соображений (рис. 10) находим, что $dr = \cos \theta dl$. Для производной $d\mu/dl$ имеем

$$\frac{d\mu}{dl} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dl} = -\sin \theta \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{1 - \mu^2}{r}. \quad (193)$$

Здесь использован тот факт, что $d\theta \leq 0$ для любых dl .

$y(r)$ равной нулю. В терминах новой переменной уравнение принимает следующий вид:

$$4\pi G r^2 y(r)^n = -\gamma n \mathcal{K} \rho_0^{\gamma-2} \frac{d}{dr} \left[r^2 y(r)^{n\gamma-n-1} \frac{dy(r)}{dr} \right]. \quad (59)$$

Полагая в нем $n = 1/(\gamma - 1)$ и переходя к безразмерному расстоянию $x = r/r_0$, получаем следующее уравнение:

$$4\pi G r_0^2 x^2 y(x)^n = -(n+1) \mathcal{K} \rho_0^{1/n-1} \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{dy(x)}{dx} \right]. \quad (60)$$

Далее удобно выбрать $r_0^2 = (n+1) \mathcal{K} \rho_0^{1/n-1} / (4\pi G)$. Тогда уравнение статического равновесия газа принимает совсем простой вид:

$$x^2 y(x)^n = -\frac{d}{dx} \left[x^2 y'(x) \right] \quad \text{или} \quad x y''(x) + 2 y'(x) + x y(x)^n = 0, \quad (61)$$

где штрих означает производную $y(x)$ по x . Так как решение данного уравнения зависит от индекса политропы n , то далее будем обозначать его как $y_n(x)$. Полученное уравнение является уравнением второго порядка, следовательно, должно быть дополнено двумя граничными условиями. Одно из них очевидно, если интерпретировать параметр ρ_0 как плотность ρ_c в центре статической конфигурации. Тогда $y_n(0) = 1$. Другое граничное условие диктуется самим видом уравнения. Действительно, разлагая решение уравнения $y_n(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$ и удерживая члены до второго порядка включительно $y_n(x) \simeq 1 + Ax + Bx^2$, получаем:

$$x 2B + 2(A + 2Bx) + x(1)^n = 0. \quad (62)$$

Отсюда следует $A = 0$, $B = -1/6$, и общий вид решения вблизи точки $x = 0$ дается следующим выражением:

$$y_n(x) \Big|_{x \ll 1} \simeq 1 - x^2/6, \quad (63)$$

и не зависит от индекса политропы n . Таким образом, в качестве второго граничного условия можно выбрать $y'_n(0) = 0$. Окончательно уравнение гидростатического равновесия газа в случае политропного уравнения состояния может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} x y_n''(x) + 2 y_n'(x) + x y_n(x)^n &= 0, & y_n(0) &= 1, & y'_n(0) &= 0, \\ r &= r_0(n) x, & \rho(r) &= \rho_c y_n(r)^n, & P(r) &= \mathcal{K} \rho(r)^\gamma, \\ r_0(n)^2 &= (n+1) \mathcal{K} \rho_c^{1/n-1} / (4\pi G), & \gamma &= 1 + 1/n, \end{aligned} \quad (64)$$

где параметр n называется индексом политропы. Как видно, распределение плотности в политропной звезде полностью определяется тремя параметрами – \mathcal{K} и n , характеризующими свойства самого газа, и ρ_c , соответствующего плотности в центре звезды. Параметр r_0 в случае конечного распределения вещества дает характерный размер области, занимаемой газом. Точное определение радиуса R_n политропной звезды может быть получено из следующего очевидного условия:

$$y_n(x_0(n)) = 0, \quad R_n = r_0(n) x_0(n). \quad (65)$$

Здесь безразмерная координата $x_0(n)$ соответствует точке, где значение плотности обращается в ноль. Так как уравнение на функцию $y_n(x)$ зависит только от индекса политропы n , то значение безразмерного радиуса $x_0(n)$ политропной звезды определяется только типом газа, из которого она состоит. Как будет показано ниже, конечный размер такой звезды возможен только для газа с $n < 5$ ($\gamma > 6/5$).

Отметим несколько достаточно очевидных свойств статических конфигураций политропного газа, которые могут быть получены без явного решения уравнения (64). Политропное уравнение состояния для случая $n = 0$ ($\gamma = \infty$) формально приводит к тому, что давление газа бесконечно. Это можно интерпретировать как абсолютно несжимаемую жидкость с постоянной плотностью, так как любая неоднородность в таком газе будет приводить к бесконечным силам, стремящимся вернуть среду в однородное состояние. Этот случай соответствует предельно жесткому уравнению состояния. Предельно мягкое уравнение состояния, когда давление вообще не зависит от плотности, соответствует $n = -1$ ($\gamma = 0$). Однако не все значения индекса политропы являются допустимыми в рассматриваемой задаче. Действительно, конфигурация газа может быть равновесной лишь в том случае, когда его давление всюду складывается от центра звезды к краю, так как в противном случае, связанная с давлением, будет сонаправлена с гравитационной и равновесие в звезде установится невозможным. Таким образом, должно выполняться следующее условие:

$$\frac{dP(r)}{dr} = (n+1) \mathcal{K} \rho_c^{1/n+1} y_n(r)^n \frac{dy_n(r)}{dr} \leq 0. \quad (66)$$

Как показывает численное решение уравнения (64), для любого значения индекса политропы n функция $y_n(x)$ является монотонно убывающей, то есть $y'_n(x) \leq 0$. Следовательно, для существования статической конфигурации требуется выполнение условия $n \geq -1$. Однако допустимые

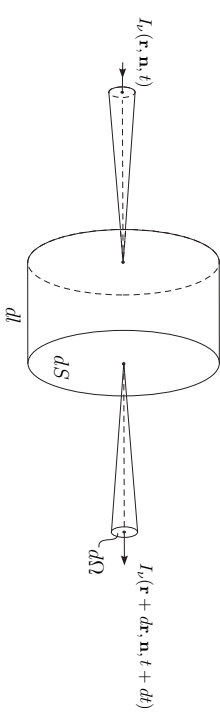


Рис. 9. Элемент объема, содержащий излучающее и поглощающее вещество

4.2.3 Вывод уравнения переноса

Предположим, что коэффициенты поглощения и излучения заданы. Найдем, как меняется интенсивность с течением времени вдоль луча. Рассмотрим элемент объема толщиной dl и с поперечным сечением dS . Пусть луч, распространяющийся в направлении \mathbf{n} в пределах телесного угла $d\Omega$, входит в точку \mathbf{r} в момент времени t в элемент объема перпендикулярно dS (рис. 9). Тогда разность между количеством энергии, которое втекло в объем, и количеством энергии, которое вытекло из объема, в точке $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ в момент времени $t + dt$ должна равняться притоку энергии за счет излучения вещества в объеме за вычетом количества энергии, которое поглотилось веществом. Тогда

$$[I_\nu(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{n}, t + dt) - I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)] dS d\Omega dv dt = [\epsilon_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) - \alpha_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)] dl dS d\Omega dv dt. \quad (187)$$

Введем аффинную переменную l , являющуюся расстоянием вдоль луча $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + l\mathbf{n}$. Тогда $dl = cd\mathbf{t}$, $d\mathbf{r} = dl\mathbf{n}$, и

$$I_\nu(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{n}, t + dt) - I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} + \frac{\partial I_\nu}{\partial t} dt = \left[\frac{\partial I_\nu}{\partial l} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} \right] dl. \quad (188)$$

Подставляя это выражение в соотношение (187), приходим к уравнению переноса излучения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial l} = \epsilon_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (189)$$

Производную $\partial I_\nu / \partial l$ можно выразить через скалярное произведение вектора \mathbf{n} и градиента от интенсивности. Тогда уравнение (189) можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = \epsilon_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (190)$$

площадку за время dt , равно $dE_\nu = I_\nu dS d\Omega d\nu dt$. Если среда способна поглощать излучение, то при прохождении слоя толщиной dl будет поглощена доля указанной энергии, пропорциональная dl . Обозначим эту долю $\alpha_\nu dl$. Тогда количество энергии, поглощенное слоем вещества, будет

$$\alpha_\nu dl I_\nu dS d\Omega d\nu dt. \quad (184)$$

Величина α_ν имеет размерность обратной длины и называется *коэффициентом поглощения* или *коэффициентом ослабления*. Иногда вводят так называемый *коэффициент непрозрачности* $\varkappa_\nu = \alpha_\nu / \rho$, где ρ — плотность вещества.

В общем случае, коэффициент поглощения зависит не только от частоты, но и от направления, координат и времени $\alpha_\nu = \alpha_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$. Но для неподвижных, стационарных и однородных сред, в которых отсутствуют выделенные направления, обусловленные, например, наличием магнитного поля, коэффициент поглощения является функцией только частоты.

В большинстве случаев, целесообразно делать различие между истинным поглощением, при котором фотон излучения полностью исчезает, а его энергия превращается тепловую энергию среды, и процессами рассеяния, при которых фотоны уводятся из пучка. Считается, что данные процессы происходят независимо. Тогда коэффициент поглощения можно представить в виде

$$\alpha_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \varkappa_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) + \sigma_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t), \quad (185)$$

где \varkappa_ν называется *коэффициентом истинного поглощения*, а σ_ν — *коэффициентом рассеяния*.

4.2.2 Коэффициент излучения

Для описания излучательной способности вещества вводится макроскопический *коэффициент излучения* $\epsilon_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$, который определяется следующим способом: количество энергии, излучаемое объемом вещества, с поперечным сечением dS и толщиной dl , в интервале частот $d\nu$ в пределах телесного угла $d\Omega$ около направления \mathbf{n} за время dt , равно

$$dE_\nu = \epsilon_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) dS dl d\Omega d\nu dt. \quad (186)$$

Размерность коэффициента излучения $[\epsilon_\nu] = \text{эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср})$.

Отрицательные значения n соответствуют отрицательным показателям политропы $\gamma < 0$, когда давление газа растет с уменьшением плотности. В этом случае статическая конфигурация возможна лишь когда плотность в полиτροпной звезде растет от центра наружу. Очевидно, что такая конфигурация не может быть конечной. Таким образом, физически интересным диапазоном изменения индекса политропы в данной задаче можно считать

$$n \geq 0 \quad (\gamma \geq 1). \quad (67)$$

Данное условие показывает, что полиτροпные звезды не могут иметь слишком мягкое уравнение состояния.

Другой особенностью рассматриваемой задачи является то, что масса полиτροпной звезды в случае ее конечного размера не зависит от распределения газа внутри. Действительно, выражение для полной массы звезды запишется как

$$M_n = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi r_0(n)^3 \rho_c \int_0^{x_0(n)} x^2 y_n(x)^n dx, \quad (68)$$

что, в силу уравнения (61), может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} M_n &= -4\pi r_0(n)^3 \rho_c \int_0^{x_0(n)} \frac{d}{dx} [x^2 y_n'(x)] dx = \\ &= 4\pi r_0(n)^3 \rho_c \left(-x_0(n)^2 y_n'(x_0(n)) \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Таким образом, для массы полиτροпной звезды получаем следующее выражение:

$$M_n = \frac{\chi_n (n+1)^{3/2}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2} \rho_c^{(3-n)/(2n)}, \quad \chi_n = -x_0(n)^2 y_n'(x_0(n)), \quad (70)$$

где было использовано определение $r_0(n)$. Отметим, что численное решение уравнения (64) показывает, что, хотя по отдаленности значения $x_0(n)$ и $y_n'(x_0(n))$ сильно зависят от индекса политропы n , сам параметр χ_n меняется слабо и для оценок может быть принят равным $\chi_n \sim 2$. Слабая зависимость этого параметра от индекса политропы следует и непосредственно из самого уравнения (61), так как вблизи края звезды, где $y_n(x) \sim 0$, получаем $x^2 y_n'(x) \sim \text{const}$.

Из полученного выше выражения для массы политропной звезды следует, что ее центральная плотность растет с ростом массы в случае достаточно жестких уравнений состояния $n < 3$ ($\gamma > 4/3$), что соответствует устойчивому равновесию. Для звезд с мягким уравнением состояния $n > 3$ ($\gamma < 4/3$) ситуация обратная, и они находятся в неустойчивом равновесии. Пограничным случаем являются звезды с $n = 3$ ($\gamma = 4/3$). Их масса не зависит от значения центральной плотности и определяется лишь параметром K :

$$M_3 = \frac{4\chi_3}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2} \simeq 4.5 \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2}, \quad (71)$$

$$x_0(3) \simeq 6.89, \quad y'_3(x_0(3)) \simeq -0.04, \quad \chi_3 \simeq 2.02.$$

Это означает, что газ с таким политропным уравнением состояния не может образовывать статической конфигурации, если его масса отлична от M_3 . Радиус, соответствующий равновесной конфигурации, определяется только плотностью в центре звезды:

$$R_3 = x_0(3) \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3} \simeq 3.9 \left(\frac{K}{G} \right)^{1/2} \rho_c^{-1/3} \simeq 2.3 \left(\frac{M_3}{\rho_c} \right)^{1/3}, \quad (72)$$

а сама звезда находится в так называемом безразличном равновесии, когда она может иметь любой радиус.

Другим интересным случаем является газ с индексом политропы $n = 1$ ($\gamma = 2$). Как следует из (64), радиус таких звезд всегда одинаков и определяется как:

$$R_1 = \frac{x_0(1) K}{2\pi G} = \frac{K}{2G}, \quad (73)$$

$$x_0(1) = \pi, \quad y'_1(x_0(1)) = -1/\pi, \quad \chi_1 = \pi.$$

Масса и плотность в центре таких звезд связаны линейным соотношением:

$$M_1 = \sqrt{2\pi} \rho_c \left(\frac{K}{G} \right)^{3/2}, \quad (74)$$

что является очевидным следствием постоянства их объема.

Отметим также, что звезды с предельно жестким уравнением состояния, для которых $n = 0$ ($\gamma = \infty$), не могут быть описаны непосредственно соотношениями из (64), так как параметр $r_0(0)$ в этом случае не

В случае изотропного поля излучения $K_\nu = J_\nu/3$, а тензор давления излучения равен

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{4\pi}{3c} \begin{pmatrix} J_\nu & 0 & 0 \\ 0 & J_\nu & 0 \\ 0 & 0 & J_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \varepsilon_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\nu & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\nu \end{pmatrix}, \quad (182)$$

и во всех расчетах можно от тензора \mathcal{P}_{ij} перейти к скалярной величине ε_ν .

Для равновесного излучения получаем, что давление изотропно и равно

$$p_I = \frac{a_r T^4}{3}. \quad (183)$$

Отношение $f_\nu \equiv K_\nu/J_\nu$ называется *переметный единичноносский множитель* и характеризует степень изотропии поля излучения. Как мы видели, для полностью изотропного излучения $f_\nu = 1/3$. Максимального значения переметный единичноносский множитель достигает в случае, когда излучение распространяется в одном направлении (например плоская волна). В этом случае для задачи о плоской атмосфере интенсивность можно представить как $I_\nu(z, \mu, t) = I_\nu(z, t)\delta(\mu - 1)$. Подставляя данную интенсивность в формулы для K_ν и J_ν , получаем, что $f_\nu = 1$.

4.2 Уравнение переноса

При прохождении излучения через вещество его интенсивность может изменяться вследствие способности данного вещества поглощать, или наоборот, излучать лучистую энергию. Фотоны излучения, распространяющиеся в определенном направлении, могут выбывать из пучка в результате поглощения средой либо рассеяния на составляющих ее элементах (электроны, атомы, частицы пыли и т. д.). В свою очередь, само вещество может излучать фотоны, которые будут давать вклад в интенсивность. Для описания указанных процессов в теории переноса вводят макроскопические коэффициенты поглощения и излучения света. Расчет этих коэффициентов является самостоятельной задачей и проводится методами классической или квантовой электродинамики.

4.2.1 Коэффициент поглощения

Пусть на площадку dS по нормали к ней падает излучение с интенсивностью I_ν . Тогда, согласно (152), количество энергии, прошедшее через

Физическая интерпретация данного выражения вытекает из следующих соображений. По аналогии с плотностью энергии, плотность импульса излучения может быть выражена через функцию распределения фотонного газа следующим образом:

$$\pi_i = 2 \int \frac{h\nu}{c} n_i f \frac{d^3p}{h^3}, \quad (177)$$

где n_i – единичный вектор, направленный вдоль импульса фотона. Тогда элемент импульса излучения

$$dP_i = 2 \frac{h\nu}{c} n_i f \frac{d^3p}{h^3} dV. \quad (178)$$

Элемент объема, занимаемого излучением, прошедшим через элемент площади dS в направлении n_j за время dt , равен $dV = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} c dt = n_j dS_j c dt$. Воспользовавшись соотношением между функцией распределения и удельной интенсивностью (155), а также выражая элемент импульсного объема через частоту и телесный угол, для импульса излучения получаем

$$dP_i = \frac{1}{c} I_\nu n_i n_j d\nu dS_j d\Omega dt. \quad (179)$$

Данная величина, будучи деленная на dt и dS_j , представляет собой тензор, элементами которого является давление, производимое фотонами излучения с импульсами p_i , проходящими через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно j -му направлению. Ее спектральная плотность, проинтегрированная по все направлениям в импульсном пространстве, и есть тензор $\mathcal{P}_{ij}(\nu, \mathbf{r}, t)$ (176). Тензор \mathcal{P}_{ij} в теории переноса носит название *тензор давления излучения* (или *тензор напряжений поля излучения*). Очевидно, что это симметричный тензор, $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ji}$. Его размерность $[\mathcal{P}] = \text{эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{Гц})$.

В одномерной задаче (случай плоской или сферически симметричной атмосферы) поле излучения не зависит от азимутального угла ϕ , поэтому тензор давления становится диагональным:

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{2\pi}{c} \begin{pmatrix} J_\nu - K_\nu & 0 & 0 \\ 0 & J_\nu - K_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2K_\nu \end{pmatrix}, \quad (180)$$

где K_ν – второй эддингтоновский момент интенсивности:

$$K_\nu(z, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu, t) \mu^2 d\mu. \quad (181)$$

определен. Однако очевидно, что для такого газа выполняются следующие соотношения:

$$\rho(r) = \rho_c, \quad M_0 = \frac{4\pi}{3} \rho_c R_0^3, \quad (76)$$

которые связывают массу, радиус и центральную плотность несжимаемых звезд.

2.4 Решения политропного уравнения и его свойства

Рассмотрим теперь более подробно некоторые свойства решений уравнения статического равновесия политропного газа:

$$x y_n''(x) + 2 y_n'(x) + x y_n(x)^n = 0, \quad y_n(0) = 1, \quad y_n'(0) = 0. \quad (76)$$

Некоторые из них уже были получены ранее. В частности, было показано, что поведение решений вблизи точки $x = 0$ не зависит от показателя политропы n и определяется только видом самого уравнения:

$$y_n(x) \Big|_{x \ll 1} \simeq 1 - x^2/6. \quad (77)$$

Отметим, что, как показывает численный анализ, данное выражение удовлетворительно описывает решение вплоть до $x \sim 1$. Однако это не означает, что поведение плотности в центре политропной звезды не зависит от типа газа, из которого она состоит, так как $\rho(r) = \rho_c y_n(r/r_0(n))^n$.

Рассматриваемое уравнение не может быть разрешено в элементарных функциях, так как является нелинейным. Однако существует три частных случая, когда решения могут быть получены явно. Два из них соответствуют линейным уравнениям при $n = 0$ и $n = 1$, и один – нелинейному случаю $n = 5$. Опуская вывод, приведем здесь лишь окончательный вид этих решений, удовлетворяющих заданным граничным условиям:

$$y_0(x) = 1 - x^2/6, \quad y_1(x) = \sin(x)/x, \quad y_5(x) = (1 + x^2/3)^{-1/2}. \quad (78)$$

Отметим, что общее поведение решений вблизи точки $x = 0$ совпадает с точным решением для $n = 0$. Графики данных функций приводятся на рис. 4. Очевидно, что физический смысл данные решения имеют лишь в области положительных значений $x \in [0, x_0(n)]$, где $x_0(n)$ – минимальный из корней уравнения $y_n(x_0(n)) = 0$. Поэтому далее всюду будет рассматриваться только этот интервал x , даже если формальное решение

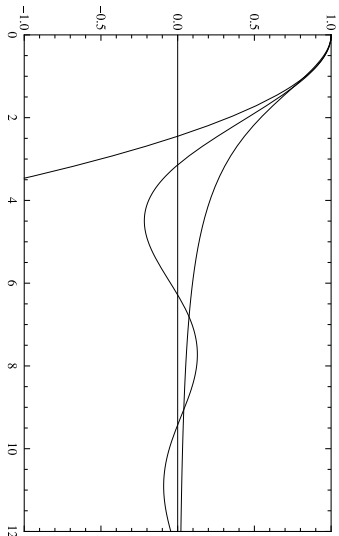


Рис. 4. Графики аналитических решений $y_n(x)$, $y_1(x)$ и $y_5(x)$ безразмерного уравнения равновесия политропного газа для случаев $n = 0, 1, 5$

уравнения существует в более широкой области. Как видно из приведенных аналитических решений, $x_0(n)$ растет с ростом n и становится бесконечным при $n = 5$. Значение функции $y_n(x)$ при фиксированном x также растет с ростом n . Так как $y_n(x)$ гладко зависит от показателя политропы, то можно предположить, что эти тенденции сохранятся и в общем случае. Действительно, как показывает анализ уравнения в рассматриваемом диапазоне x , для его решений справедливы следующие соотношения :

$$y_{n_2}(x) > y_{n_1}(x), \quad x_0(n_2) > x_0(n_1), \quad x_0(n) = \infty, \quad (79)$$

для $n_2 > n_1 \geq 0$ и $n \geq 5$. Таким образом, действительно, с ростом показателя политропы n растет как само решение $y_n(x)$, так и безразмерный радиус звезды x_0 , причем радиус становится бесконечным при $n = 5$. При значениях показателя политропы $n > 5$ решения при $x \rightarrow \infty$ стремятся к конечной величине, что, очевидно, соответствует бесконечной массе звезды. Таким образом, случай $n > 5$ можно считать физически не реализуемым. Графики семейства решений для различных индексов политропы, демонстрирующие полученные свойства, приводятся на рис. 4. Некоторые параметры этих решений в физически интересной области $n \leq 5$ даны в таблице 4, причем в случае аналитических решений там приводятся точные значения. С точки зрения практического применения наиболее интересными параметрами являются безразмерный радиус звезды $x_0(n)$, определяющий ее физический размер, и параметр χ_n , от которого зависит масса звезды. Как показал численный анализ исследуемого уравнения, для этих величин можно получить достаточно простые

выражение для которого аналогично по форме выражению для интенсивности (160).

Из последних выражений видно, что поток излучения можно представить как разность двух величин

$$H_\nu = \mathcal{E}_\nu^{(+)} - \mathcal{E}_\nu^{(-)}, \quad (172)$$

где

$$\mathcal{E}_\nu^{(+)} = \frac{1}{2} \int_0^1 I_\nu(z, \mu, t) \mu d\mu, \quad (173)$$

$$\mathcal{E}_\nu^{(-)} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_\nu(z, \mu, t) \mu d\mu. \quad (174)$$

Величины $\mathcal{E}_\nu^{(\pm)}$ представляются собой *освещенности* площади с двух разных сторон соответственно. Другими словами, поток излучения через какую-либо площадь есть разность освещенностей этой площади.

Отметим также, что в случае изотропного излучения, когда интенсивность не зависит от направления, полный поток через площадь, как следует из (171), равен нулю. Такая ситуация может реализовываться в поле равновесного излучения, например внутри звезды.

Если равновесное излучение происходит с поверхности в полусфере, тогда полный поток

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_0^1 \mu d\mu \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) = \sigma_B T^4, \quad (175)$$

где $\sigma_B = a_\nu c/4$ – постоянная Стефана-Больцмана.

4.1.5 Тензор давления излучения

Как мы видели, средняя интенсивность и поток представляются собой моменты нулевого и первого порядка удельной интенсивности по направлениям. Вторым момент является тензорной величиной и может быть записан следующим образом:

$$P_{ij}(\nu, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\mathbf{r}, t) n_i n_j d\Omega. \quad (176)$$

4.1.4 Поток

Поток излучения $\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t)$ определяется как количество энергии излучения, протекающее через единичную площадку в направлении \mathbf{n} за единицу времени, в единичном интервале частот. В отличие от интенсивности, поток является векторной величиной, которая коллинеарна \mathbf{n} . Исходя из определения, мы можем написать

$$dE_\nu = \mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} dt d\nu, \quad (166)$$

тогда с учетом (152) получаем следующее соотношение между потоком излучения и его интенсивностью

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t) = \int I_\nu(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} d\Omega. \quad (167)$$

Размерность потока $[\mathcal{F}_\nu] = \text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \Gamma_\Pi)$.

Единичный вектор \mathbf{n} можно представить в следующем виде

$$\mathbf{n} = (\sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi, \mu). \quad (168)$$

Если поле излучения не зависит от азимутального угла ϕ , то несложно видеть, что только лишь компонента потока вдоль оси z отлична от нуля. В этом случае поток можно формально рассматривать как скалярную величину, которая равна

$$\mathcal{F}_\nu(z, t) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu, t) \mu d\mu. \quad (169)$$

Таким образом, из (167) и (169) видно, что поток является первым моментом интенсивности по угловым переменным.

В астрофизике принято опускать π в формуле (169), вводя так называемый *астрофизический поток*

$$F_\nu(z, t) \equiv \frac{1}{\pi} \mathcal{F}_\nu(z, t) = 2 \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu, t) \mu d\mu. \quad (170)$$

Кроме того, часто используется *эдингтоновский поток*, определяемый как

$$H_\nu(z, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}_\nu(z, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu, t) \mu d\mu, \quad (171)$$

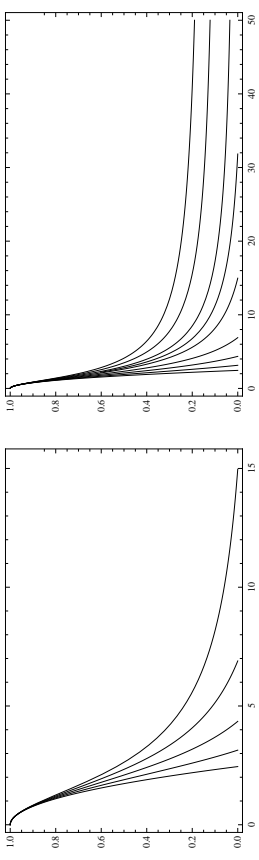


Рис. 5. Графики решений $y_n(x)$ для случая конечного радиуса политропной звезды при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (левая панель) и общее семейство всех решений при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 4.5, 5, 6, 7$ (правая панель)

Таблица 4
Свойства решений безразмерного уравнения равновесия

n	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
γ	∞	3	2	1.67	1.5	1.4	1.33	1.29	1.25	1.22	1.2
$x_0(n)$	$\sqrt{6}$	2.8	π	3.7	4.4	5.4	6.9	9.5	15	32	∞
$-y'_n(x_0(n))$	$\sqrt{6}/3$	0.50	$1/\pi$	0.20	0.13	0.08	0.04	0.02	0.008	0.002	0
χ_n	$2\sqrt{6}$	3.79	π	2.71	2.41	2.19	2.02	1.89	1.80	1.74	$\sqrt{3}$

аппроксимационные выражения, которые близки к точным решениям в широком диапазоне изменения параметра n :

$$x_0(n) \simeq \frac{16}{5 - n}, \quad \chi_n \simeq \sqrt{3} + \frac{(5 - n)^3}{40}. \quad (80)$$

Точность этих выражений демонстрируется на рис. 6, где приведены графики данных функций, а точкам соответствуют значения, полученные из численного решения уравнения. Данные выражения позволяют получить основные характеристики политропных звезд, такие как масса и радиус, в зависимости от типа газа и его плотности в центре.

Как было показано выше, для существования равновесной и конечной конфигурации политропного газа его индекс должен лежать в диапазоне:

$$0 \leq n < 5. \quad (81)$$

Однако, как видно из таблицы 4, случаю $n = 5$ соответствует звезда хотя и бесконечного радиуса ($x_0(5) = \infty$), но имеющая конечную массу ($\chi_5 = \sqrt{3}$). Эта масса может быть получена из выражения (70):

$$M_5 = 9 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\mathcal{K}}{G} \right)^{3/2} \rho_c^{-1/5} \simeq 7.2 \left(\frac{\mathcal{K}}{G} \right)^{3/2} \rho_c^{-1/5}, \quad (82)$$

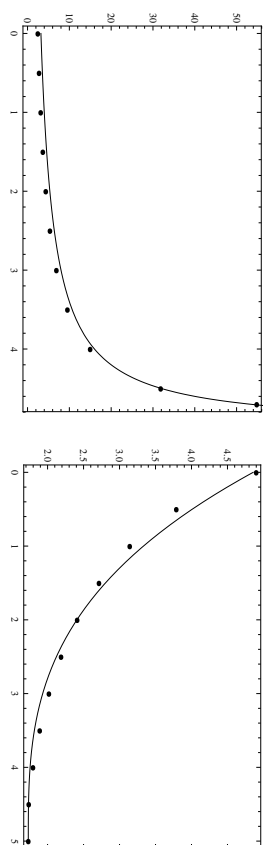


Рис. 6. Профили аппроксимационных функций для безразмерного радиуса политропной звезды $x_0(n)$ (левая панель) и параметра χ_n (правая панель). Точкам соответствуют значения, полученные из численного решения уравнения

либо непосредственным интегрированием решения $y_5(x)$. Несмотря на то что звезда с бесконечным радиусом может показаться физически не реализуемым, тем не менее данное решение хорошо описывает наружные части звезд на стадии красных гигантов и сверхгигантов, радиусы которых существенно превышают размеры обычных звезд главной последовательности.

2.5 Свойства политропных звезд

Как отмечалось выше, соотношения (64) позволяют полностью описать политропную звезду при задании трех независимых параметров K , n и ρ_c . Однако если K и n характеризуют сжимаемость и тип газа, из которого состоит политропная звезда, то его центральная плотность ρ_c хотя и является удобным для математической постановки задачи параметром, но физический смысл ее в такой интерпретации остается неясен. Действительно, из общих соображений понятно, что конфигурация политропной звезды, состоящей из определенного газа, должна определяться его массой M_n и полной энергией. В интересах для практического применения случаев энергии газа влияет на его сжимаемость, то есть определяет параметр K . Хотя такое утверждение не совсем верно, но качественно оно правильно, по крайней мере для случая болдмановского газа. Следовательно, центральная плотность политропной звезды при фиксированной энергии должна определяться лишь ее массой, а связь между этими величинами дается соотношением (70). Используя его, всегда можно перейти от центральной плотности звезды к ее массе. Поэтому приведем для полноты совокупность уравнений, определяющих

Элемент телесного угла $d\Omega$ может быть записан как $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$, где $\mu \equiv \cos\theta$. Если рассматривается задача с аксиальной симметрией, то I_ν не зависит от ϕ , и поэтому

$$J_\nu(z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d\mu I_\nu(z, \mu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu, t) d\mu. \quad (160)$$

Это выражение применимо и в сферически симметричной геометрии, если заменить z на r .

Используя (149) и соотношение между интенсивностью и функцией распределения (155), можно получить выражение для плотности энергии излучения через интенсивность

$$\epsilon(\mathbf{r}, t) = 2 \int h^{-2} \nu f d^3p = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega d\nu. \quad (161)$$

Определим *спектральную или монохроматическую плотность энергии излучения* как

$$\epsilon_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega, \quad (162)$$

тогда

$$\epsilon_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (163)$$

Заметим, что если излучение изотропно, т. е. интенсивность излучения не зависит от направления, то

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = I_\nu(\mathbf{r}, t), \quad \epsilon_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} I_\nu(\mathbf{r}, t). \quad (164)$$

Для случая равновесного излучения получаем $\epsilon_\nu = 4\pi/c B_\nu(T)$. Тогда полная плотность энергии излучения дается следующей формулой:

$$\epsilon = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = a_r T^4, \quad (165)$$

где $a_r = 8\pi^5 k^4 / (15h^3 c^2)$ – *постоянная излучения*.

Интенсивность может измениться с частотой достаточно медленно, тогда говорят о непрерывном спектре излучения. В случае наличия резких изменений в интенсивности или потоке волны частоты, соответствующей какому-либо дискретному переходу в излучающей системе, говорят о спектральной детали, в частности о спектральной линии.

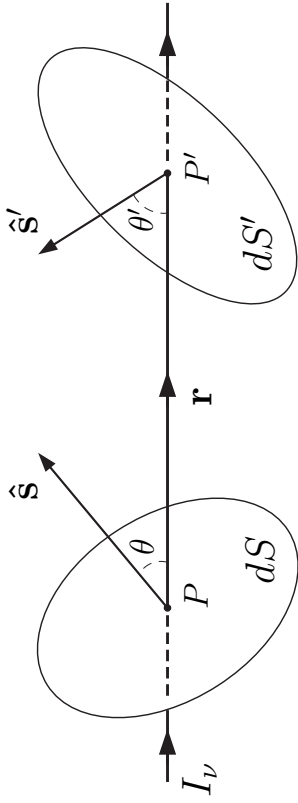


Рис. 8. Геометрическое пояснение к доказательству о постоянстве интенсивности излучения вдоль луча

где оператор $\mathbf{n} \cdot \nabla$ есть производная по направлению. Она может быть заменена на обычную производную, если перейти к аффинной координате l , являющейся расстоянием от начала координат вдоль направления луча: $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}_0 + l\mathbf{n}$. Тогда уравнение (157) запишется как

$$\frac{dI_\nu}{dl} = 0. \quad (158)$$

Рассмотрим вопрос о законе преобразования интенсивности при переходе от одной инерциальной системы к другой. Для простоты изложения ограничимся стационарным случаем, когда поле излучения не меняется со временем. Известно, что функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ инвариантна относительно преобразований Лоренца. Тогда, используя соотношение между интенсивностью и функцией распределения фотонов (155), найдем, что отношение I_ν/ν^3 инвариантно при переходе из одной инерциальной системы в другую.

4.1.3 Средняя интенсивность

Если интенсивность нам известна, то могут быть определены и другие величины, характеризующие поле излучения. Большинство из них являются средними по углам, или *моментами*. Так, например, *средняя интенсивность* определяется как среднее по всем телесным углам (момент нулевого порядка) от спектральной интенсивности

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{\int I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) d\Omega. \quad (159)$$

равновесную конфигурацию политропной звезды, в случае, когда независимыми параметрами являются \mathcal{K} , n и M_n :

$$\begin{aligned} x y_n''(x) + 2 y_n'(x) + x y_n(x)^n &= 0, & y_n(0) &= 1, & y_n'(0) &= 0, \\ y_n(x_0(n)) &= 0, & R_n &= r_0(n) x_0(n), & \chi_n &= -x_0(n)^2 y_n'(x_0(n)), \\ r = r_0(n) x, & \rho(r) = \rho_c y_n(r)^n, & P(r) &= \mathcal{K} \rho(r)^{1+1/n}, & (83) \\ r_0(n) &= \left[\frac{(n+1) \chi_n^{1-1/n}}{(4\pi)^{1/n}} \frac{\mathcal{K}}{GM_n^{1-1/n}} \right]^{n/(3-n)}, \\ \rho_c &= \left[\frac{4\pi}{\chi_n^2 (n+1)^3} \frac{G^3 M_n^2}{\mathcal{K}^3} \right]^{n/(3-n)}. \end{aligned}$$

Отметим, что из данных уравнений следует интересное с астрофизической точки зрения соотношение на массу и радиус политропной звезды. А именно,

$$R_n = x_0(n) \left[\frac{(n+1) \chi_n^{1-1/n} \mathcal{K}}{(4\pi)^{1/n}} \frac{1}{G} \right]^{n/(3-n)} M_n^{(n-1)/(n-3)}. \quad (84)$$

Из данного выражения следует, в частности, уже обсуждавшийся ранее факт, что радиус звезд с индексом политропы $n = 1$ не зависит от их массы. Отсюда также следует, что радиус звезды растет с ростом массы лишь при $n < 1$ и $n > 3$ и убывает в остальных случаях.

Из уравнений (83) может быть получено еще одно интересное соотношение, связывающее массу политропной звезды с давлением P_c в ее центре. Если из выражения для ρ_c получить параметр \mathcal{K} и подставить его в политропное уравнение состояния, то для давления в центре звезды получим следующее выражение:

$$P_c = \frac{(4\pi)^{1/3} G}{(n+1) \chi_n} \rho_c^{4/3} M_n^{2/3}. \quad (85)$$

Оно интересно тем, что не содержит параметр \mathcal{K} и слабо зависит от индекса политропы n , что делает его весьма универсальным. В частности, отсюда может быть получена оценка температуры T_c в центре звезд главной последовательности, для которых справедливо уравнение состояния идеального газа $P = n_g kT$. Если считать, что центральная часть звезды состоит из полностью ионизованного водорода, то получаем давление $P = (n_e + n_p) kT = 2n_p kT = 2\rho kT/m_p$, где n_e , n_p — концентрации электронов и протонов, m_p — масса протона. Тогда для температуры в центре

звезд главной последовательности получаем следующее выражение, которое слабо зависит от центральной плотности звезды:

$$T_c = \frac{\pi^{1/3}}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \frac{G^{1/3} m_p}{k} \rho_c^{1/3} M^{2/3}. \quad (86)$$

Данное соотношение хорошо тем, что не содержит параметр K , так как он сильно меняется даже у звезд главной последовательности. Отметим, что для Солнца данное выражение приводит к следующему значению $T_c \simeq 1.6 \times 10^7$ К, что хорошо согласуется со значениями, получаемыми по точным численным моделям.

Еще одно соотношение, следующее из (83), может быть получено прямым вычислением произведения $\rho_c R_n^3$. Несложно проверить, что это приводит к следующему выражению:

$$\rho_c R_n^3 = \frac{x_0(n)^3}{4\pi \chi_n} M_n. \quad (87)$$

Более наглядно это соотношение может быть представлено в терминах средней плотности звезды $\bar{\rho} = 3M_n/(4\pi R_n^3)$, а именно:

$$\rho_c = \frac{x_0(n)^3}{3 \chi_n} \bar{\rho}. \quad (88)$$

Данное выражение показывает, что центральная плотность, по сравнению со средней, существенно возрастает при увеличении индекса полинома n и превосходит ее на один-два порядка.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие силы в самогравитирующем газе являются основными?
2. Чем определяется гравитационная неустойчивость одномерно расплавленного газа?
3. Какие параметры влияют на равновесную конфигурацию политропных звезд? Каков их физический смысл?
4. Чем определяется масса политропной звезды?
5. Перечислите основные свойства политропных звезд.

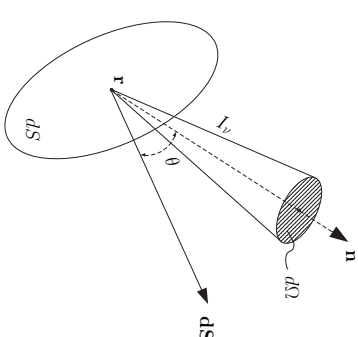


Рис. 7. К определению интенсивности излучения

До сих пор интенсивность рассматривалась как функция частоты. Аналогично можно ввести интенсивность, зависящую от длины волны λ . Связь между двумя функциями можно получить из очевидного соотношения $I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$, тогда

$$|I_\lambda| = \left| \frac{c}{\lambda^2} I_\nu \right|.$$

Важным свойством интенсивности является ее независимость от расстояния между источником и наблюдателем (при отсутствии на луче зрения источников поглощения либо испускания излучения). Для доказательства этого рассмотрим пучок лучей, проходящий через площадку dS в точке P и dS' в точке P' , расположенные на расстоянии r друг от друга (рис. 8). Очевидно, что количество энергии, которое проходит через площадку dS , равно количеству энергии, проходящую через площадку dS' . $dE_\nu = dE'_\nu$. Тогда из определения интенсивности (152) получаем следующее равенство

$$I_\nu \cos \theta dS d\Omega d\nu dt = I'_\nu \cos \theta' dS' d\Omega' d\nu dt, \quad (156)$$

где $d\Omega$ – телесный угол, под которым из точки P видна площадка dS' , а $d\Omega'$ – телесный угол, под которым dS видно из точки P' . Используя определение телесного угла получаем, что $d\Omega = r^{-2} dS' \cos \theta'$ и $d\Omega' = r'^{-2} dS \cos \theta$, откуда немедленно следует равенство $I_\nu = I'_\nu$.

Математически постоянство удельной интенсивности вдоль направления распространения излучения \mathbf{n} может быть представлено следующим образом:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = 0, \quad (157)$$

где T – температура излучения, а k – постоянная Больцмана.

Плотность энергии равновесного излучения может быть выражена через функцию Планка $B_\nu(T)$

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu, \quad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}. \quad (151)$$

4.1.1.2 Удельная интенсивность

В качестве основной величины, которая дает полное описание поля излучения, в теории переноса принимается *спектральная или удельная интенсивность излучения* $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$, которая определяется следующим образом. Пусть из точки \mathbf{r} излучение с частотой ν распространяется в направлении \mathbf{n} . Тогда количество энергии dE_ν , переносимое излучением в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$ через элемент площади dS в пределах телесного угла $d\Omega$ за время dt , может быть записано как

$$dE_\nu = I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} d\Omega d\nu dt = I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) \cos \theta dS d\Omega d\nu dt \quad (152)$$

где θ – угол между направлением распространения излучения и нормалью к элементу площади dS (см. рис. 7). На основании уравнения (152), записанного в виде

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \frac{dE_\nu}{\cos \theta dS d\Omega d\nu dt} \quad (153)$$

для интенсивности можно дать немного иное определение. Интенсивность излучения в данном направлении – это мощность световой энергии, проходящей через единичную площадку под углом θ в единичном телесном угле и в единичном интервале частот. Из (153) следует, что размерность интенсивности $[I_\nu] = \text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср})$.

Используя выражение (152), можно получить связь между интенсивностью и функцией распределения. Количество энергии, которая за время dt прошла через площадку dS под углом θ , выражается как

$$dE_\nu = 2h^{-2} \nu f d^3 p \cos \theta dS c dt \quad (154)$$

Так как элемент импульсного объема $d^3 p = p^2 dp d\Omega = h^3 \nu^2 / c^3 d\nu d\Omega$ для фотона, то

$$2h^{-2} \nu c f d^3 p = I_\nu d\Omega d\nu, \quad I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} f. \quad (155)$$

Для равновесного излучения из последнего соотношения мгновенно получаем, что $I_\nu = B_\nu(T)$.

3 Введение в релятивистскую кинетику

Как известно, механический подход к описанию систем, состоящих из большого числа частиц, хотя и является точным, но мало полезен с практической точки зрения. Например, для описания свойств газа совершенно не нужно знать движение отдельных его частиц. Исключение составляют лишь сильно неравновесные системы, для описания которых используется многочастичная функция распределения. В ней содержится информация о движении каждой отдельной частицы. Однако даже сильно неравновесные системы достаточно быстро переходят в состояние, когда знание о движении всех ее частиц становится бессмысленным, а сама система может быть описана в терминах одночастичной функции распределения. Строгий вывод такого перехода основан на обрыве цепочки уравнений Боголюбова, которая эквивалентна уравнению Лиувилля, точно описывающего эволюцию неравновесной системы. Обрыв цепочки этих уравнений базируется на предположении, что в системе отсутствуют корреляции движения любых двух частиц. В этом случае одночастичная функция распределения системы имеет смысл плотности числа состояний в 6-мерном фазовом пространстве, а ее эволюция определяется кинетическим уравнением Больцмана.

3.1 Релятивистское уравнение Больцмана

В литературе существует два варианта релятивистского кинетического уравнения Больцмана. Первое уравнение получается из условия, что производная от функции распределения по собственному времени вдоль фазовой траектории движения системы равна интегралу столкновений, а второе – из условия, что восьмимерная дивергенция фазового потока равна интегралу столкновений. Соответствующие уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$p^\mu \hat{\nabla}_\mu f_a + m_a F_a^\mu \frac{\partial f_a}{\partial p^\mu} = \hat{\mathbf{I}}[f_a], \quad (89)$$

$$p^\mu \hat{\nabla}_\mu f_a + m_a \frac{\partial (F_a^\mu f_a)}{\partial p^\mu} = \hat{\mathbf{I}}[f_a], \quad (90)$$

где f_a – функция распределения частиц сорта \mathbf{a} (в случае, если газ состоит из смеси различных частиц), m_a – их масса, F_a^μ – 4-вектор сил, действующих на эти частицы, $\hat{\mathbf{I}}[f_a]$ – интеграл столкновений, который будет определен позднее. Оператор Кармана, входящий в уравнение, для

любой (скалярной, векторной или тензорной) величины \mathbf{A} определяется следующим образом:

$$\hat{\nabla}_\mu \mathbf{A} = \mathbf{A}_{;\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} p^\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p^\tau}, \quad (91)$$

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = \frac{g^{\tau\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right), \quad (92)$$

где $\mathbf{A}_{;\mu}$ обозначает ковариантную производную от \mathbf{A} , $\Gamma^\nu_{\mu\nu}$ – символы Кристоффеля, а $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор. Так как ковариантная производная от скалярной функции совпадает с обычной, то уравнения Больцмана записываются в виде:

$$p^\mu \frac{\partial f_a}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{\partial f_a}{\partial p^\tau} + m_a F_a^\mu \frac{\partial f_a}{\partial p^\mu} = \hat{\mathbf{I}}[f_a], \quad (93)$$

$$p^\mu \frac{\partial f_a}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{\partial f_a}{\partial p^\tau} + m_a \frac{\partial (F_a^\mu f_a)}{\partial p^\mu} = \hat{\mathbf{I}}[f_a], \quad (94)$$

Очевидно, что оба уравнения совпадают в случае, когда

$$\frac{\partial F_a^\mu}{\partial p^\mu} = 0, \quad (95)$$

которое выполняется для большинства известных сил. Кроме того, вид первого уравнения показывает, что непрививальная метрика может быть представлена в уравнении Больцмана в виде внешней силы:

$$F_g^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\tau} p^\nu p^\tau \quad (96)$$

в плоском пространстве-времени. Таким образом, в дальнейшем мы будем использовать уравнение Больцмана в виде:

$$p^\mu \frac{\partial f_a}{\partial x^\mu} + m_a F_a^\mu \frac{\partial f_a}{\partial p^\mu} = \hat{\mathbf{I}}[f_a], \quad (97)$$

где во внешнюю силу F_a^μ при необходимости мы будем включать и вклад, связанный с непрививальной метрикой.

Интеграл столкновений, стоящий в правой части уравнения Больцмана, описывает изменение числа частиц, сорта \mathbf{a} в элементе фазового объема за счет элементарных процессов. Так как элементарные процессы происходят на микроскопических пространственных масштабах, то влияние на них изменения метрики пренебрежимо мало. Следовательно, для вычисления интеграла столкновений мы можем перейти к локальной плоской метрике. В том случае, когда мы интересуемся поведением

4 Перенос излучения

Задачей теории переноса является расчет поля излучения в среде, которая может поглощать или излучать лучистую энергию. В случае когда излучательная или поглощательная способность вещества заданы, то поле излучения рассчитывается довольно легко. Однако задача сильно усложняется в случае, когда указанные свойства вещества сами зависят от интенсивности излучения. В этом случае задача сводится к решению некоторого интегрального уравнения. Рассмотрением таких интегральных уравнений и занимается теория переноса излучения.

4.1 Поле излучения

4.1.1 Основные величины

В теории переноса излучения электромагнитное поле рассматривается в пределе, когда волновой природой излучения можно пренебречь, то есть когда длина волны λ много меньше характерных размеров в рассматриваемой системе. При этом излучение описывается как газ, состоящий из фотонов, для которых можно ввести *функцию распределения* $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ с нормировкой

$$2 \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{d^3 p}{h^3} = n(\mathbf{r}, t), \quad (148)$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ – концентрация фотонов. Энергия фотона как кванта электромагнитного поля равна $h\nu$, а его импульс $p = h\nu/c$. Двойка перед интегралом соответствует двум поляризациям фотона. Отметим, что в астрофизической теории переноса излучения принято использовать не круговую, а обычную частоту ν и, соответственно, не приведенную постоянную Планка h .

С помощью функции распределения фотонов плотность энергии излучения может быть записана как

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = 2 \int h\nu f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{d^3 p}{h^3}. \quad (149)$$

В случае термодинамически равновесного фотонного газа (излучение абсолютно черного тела) функция распределения изотропна и зависит только от частоты (длины волны) излучения

$$f = (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}, \quad (150)$$

из выражения для которого следует, что $I_a^\mu U_\mu = 0$. Данная величина связана с диффузией энергии и импульса. Из тензора энергии-импульса строится также тензор напряжений или тензор давления:

$$P_a^{\mu\nu} = T_a^{\tau\rho} \Delta_\tau^\mu \Delta_\rho^\nu = -P_a \Delta_a^{\mu\nu} + \Pi_a^{\mu\nu}, \quad (139)$$

который здесь разбит на так называемые обратимую часть, связанную с локальным гидростатическим давлением P_a , создаваемым частицами сорта \mathbf{a} , и необратимую часть $\Pi_a^{\mu\nu}$, называемую тензором вязкого давления. Отметим, что по приведённому набору величин можно однозначно разложить поток энергии-импульса и тензор энергии-импульса:

$$\pi_a^\mu = W_a U^\mu + \mathcal{I}_a^\mu, \quad (140)$$

$$T_a^{\mu\nu} = W_a U^\mu U^\nu + U^\mu \mathcal{I}_a^\nu + U^\nu \mathcal{I}_a^\mu + P_a^{\mu\nu}. \quad (141)$$

Так же, как тензор напряжений, тензор энергии-импульса можно представить в виде обратимой и необратимой части:

$$T_a^{\mu\nu} = T_{0a}^{\mu\nu} + T_{1a}^{\mu\nu}, \quad (142)$$

$$T_{0a}^{\mu\nu} = W_a U^\mu U^\nu - P_a \Delta_a^{\mu\nu}, \quad (143)$$

$$T_{1a}^{\mu\nu} = U^\mu \mathcal{I}_a^\nu + U^\nu \mathcal{I}_a^\mu + \Pi_a^{\mu\nu}. \quad (144)$$

Понятия, связанные с потоком тепла. Из локального давления и плотности энергии строится вспомогательная величина, называемая тепловой функцией или энтальпией:

$$H_a = W_a + P_a, \quad (145)$$

$$h_a = (W_a + P_a)/N_a, \quad (146)$$

где h_a – удельная энтальпия, приведённая на одну частицу. Пространственная часть разности между потоком энергии-импульса и потоком энтальпии:

$$I_a^\mu = (\pi_a^\mu - h_a N_a^{\mu\nu}) \Delta_\nu^\mu = \mathcal{I}_a^\mu - h_a J_a^\mu \quad (147)$$

определяет поток тепла, связанный с частицами сорта \mathbf{a} , что сводится к разности вектора Пойнтинга и энтальпии, переносимой диффузионным потоком.

в реакции какой-либо одной частицы, удобно работать не с самой вероятностью процесса, а вероятностью, проинтегрированной по импульсам остальных частей. Поэтому для процессов, где частица \mathbf{a} находится в начальном состоянии ($\mathbf{a} + \dots \xrightarrow{abs} \dots$), может быть определён коэффициент поглощения:

$$\mathcal{K}_a^{(abs)} = \int \frac{|S_{if}|^2}{\tau} \prod_{i \neq a, f} f_i (1 \mp f_f) dn_i dn_f, \quad (98)$$

а для реакций, где \mathbf{a} в конечном состоянии ($\dots \xrightarrow{em} \dots + \mathbf{a}$), — коэффициент излучения:

$$\mathcal{K}_a^{(em)} = \int \frac{|S_{if}|^2}{\tau} \prod_{i, f \neq a} f_i (1 \mp f_f) dn_i dn_f, \quad (99)$$

где интегрирование ведётся по фазовым объёмам dn всех начальных (i) и конечных (f) частиц, за исключением одной частицы \mathbf{a} с учётом их функций распределения f , а знак \mp соответствует фермионам и бозонам. Здесь $|S_{if}|^2/\tau$ – вероятность процесса в единицу времени, а фазовый объём для свободных частиц $dn = d^3x d^3p/(2\pi)^3$. Отметим, что из этих коэффициентов может быть найдено число процессов поглощения и излучения частицы \mathbf{a} в единице объёма в единицу времени:

$$\Gamma_a^{(abs)} = \frac{1}{V} \int \mathcal{K}_a^{(abs)} f_a dn_a, \quad (100)$$

$$\Gamma_a^{(em)} = \frac{1}{V} \int \mathcal{K}_a^{(em)} (1 \mp f_a) dn_a, \quad (101)$$

которое является инвариантом, и изменение импульса этих частиц в единице объёма за счёт этих реакций:

$$\mathcal{P}_a^{(abs)\mu} = -\frac{1}{V} \int \mathcal{K}_a^{(abs)} p^\mu f_a dn_a, \quad (102)$$

$$\mathcal{P}_a^{(em)\mu} = \frac{1}{V} \int \mathcal{K}_a^{(em)} p^\mu (1 \mp f_a) dn_a, \quad (103)$$

который является 4-вектором. Так как правая часть уравнения Больцмана должна описывать изменение числа частиц сорта \mathbf{a} в элементе её фазового объёма, то интеграл столкновений будет определяться как

$$\hat{\mathbf{I}}[f_a] = (1 \mp f_a) \varepsilon \sum_j \mathcal{K}_{a_j}^{(em)} - f_a \varepsilon \sum_l \mathcal{K}_{a_l}^{(abs)}, \quad (104)$$

где сумма берётся по всем процессам поглощения и излучения частиц сорта **a**. Отметим, что так как dn и ε/τ является инвариантами в СТО, то интеграл столкновений, определённый таким образом, будет также инвариантом.

Рассмотрим более детально частный случай, когда в процессах поглощения, излучения и рассеяния на других частицах участвует только одна частица сорта **a**:

$$a + \sum_{\alpha} b_{\alpha} \xleftrightarrow{ab\gamma} \sum_{em} c_{\beta} \quad (105)$$

$$a + \sum_{\gamma} d_{\gamma} \xleftrightarrow{ab\gamma} \sum_{\gamma} d_{\gamma} + a, \quad (106)$$

Соответствующие этим реакциям законы сохранения энергии-импульса есть:

$$p_a^{\mu} + \sum_{\alpha} p_{b_{\alpha}}^{\mu} = \sum_{\beta} p_{c_{\beta}}^{\mu}, \quad (107)$$

$$p_a^{\mu} + \sum_{\gamma} p_{d_{\gamma}}^{\mu} = \sum_{\gamma} p_{d_{\gamma}}^{\mu} + p_a^{\mu}. \quad (108)$$

Если воспользоваться тем, что для прямой и обратной реакции $|S_{if}|^2$ совпадают, то вклады в интеграл столкновений от реакций излучения и поглощения (*ea*) и процессов рассеяния (*sc*) будут даваться следующими выражениями:

$$\hat{\Gamma}_{a_n}^{(ea)}[f_a] = \varepsilon \int \frac{|S_{if}|_{a_n}^2}{\tau} \prod_{\alpha, \beta} \left[(1 \mp f_a) f_{c_{\beta}} (1 \mp f_{b_{\alpha}}) - \right. \quad (109)$$

$$\left. - f_a f_{b_{\alpha}} (1 \mp f_{c_{\beta}}) \right] dn_{b_{\alpha}} dn_{c_{\beta}},$$

$$\hat{\Gamma}_{a_k}^{(sc)}[f_a] = \varepsilon \int \frac{|S_{if}|_{a_k}^2}{\tau} \prod_{\gamma} \left[(1 \mp f_a) f_a' f_{d_{\gamma}}' (1 \mp f_{d_{\gamma}}) - \right.$$

$$\left. - f_a (1 \mp f_a') f_{d_{\gamma}} (1 \mp f_{d_{\gamma}}') \right] dn_a' dn_{d_{\gamma}} dn_{d_{\gamma}}', \quad (110)$$

где $f' = f(p^{\mu})$, $|S_{if}|_{a_n}^2$ и $|S_{if}|_{a_k}^2$ – квадраты S -матричных элементов соответственно процессов излучения (или поглощения) и рассеяния частицы **a**. В этом случае уравнение Больцмана примет вид:

$$p^{\mu} \frac{\partial f_a}{\partial x^{\mu}} + m_a F_a^{\mu} \frac{\partial f_a}{\partial p^{\mu}} = \sum_n \hat{\Gamma}_{a_n}^{(ea)}[f_a] + \sum_k \hat{\Gamma}_{a_k}^{(sc)}[f_a], \quad (111)$$

Очевидно, что они, исходя из их определения, должны удовлетворять следующему условию нормировки:

$$\sum Y_a = 1.$$

Другую важную величину даёт свёртка вектора 4-потока с проекционным оператором:

$$J_a^{\mu} = \Delta_{\nu}^{\mu} N_a^{\nu} = N_a^{\mu} - N_a U^{\mu}, \quad (133)$$

которая характеризует дефект потока частиц сорта **a** и называется вектором потока диффузии. Таким образом, поток частиц определённого сорта разбивается на продольную и поперечную ($J_a^{\mu} U_{\mu} = 0$) относительно гидродинамической скорости составляющие:

$$N_a^{\mu} = N_a U^{\mu} + J_a^{\mu}, \quad (134)$$

которые, соответственно, характеризуют перенос частиц за счёт движения среды как целого и их диффузии. Отметим, что полный вектор потока диффузии частиц обращается в ноль:

$$\sum_a J_a^{\mu} = 0, \quad (135)$$

что следует из определения (133) для отдельных потоков. Отметим также, что умножением соответствующих концентраций на массу частиц приведённые выше определения могут быть переформулированы на языке плотности и потока массы. Однако в релятивистской гидродинамике это не всегда удобно, так как некоторые частицы среды могут быть безмассовыми.

Понятия, связанные с 4-импульсом и его потоком. Величина

$$\pi_a^{\mu} = T^{\mu\nu} U_{\nu}, \quad (136)$$

определяет вектор потока энергии-импульса. С помощью него скалярная плотность энергии определяется как

$$W_a = \pi_a^{\mu} U_{\mu} = T^{\mu\nu} U_{\mu} U_{\nu}. \quad (137)$$

Данная величина имеет смысл плотности энергии в локальной системе покоя. Свёртки потока энергии-импульса с проектором Δ определяют вектор Пойнтинга:

$$T_a^{\mu} = \pi_a^{\nu} \Delta_{\nu}^{\mu} = T_a^{\nu\tau} U_{\tau} \Delta_{\nu}^{\mu} = T_a^{\nu\tau} U_{\nu} \Delta_{\tau}^{\mu}, \quad (138)$$

первое из которых предложено Экартом и связано с полным потоком частиц N^μ , а второе — Ландау и Лифшицем и связано с потоком энергии-импульса среды $T^{\mu\nu}U_\nu$. Отметим, что гидродинамическая скорость во втором определении совпадает (с точностью до нормировки) с единственным временноподобным собственным вектором тензора энергии импульса. Отметим также, что, кроме приведённых определений, в нерелятивистской гидродинамике часто используется так называемая барцентрическая гидродинамическая скорость, связанная с потоком массы. Однако её использование в релятивистской гидродинамике ограничено, так как не учитывает потоки безмассовых частиц. Если приведённые выше выражения для скорости свернуть с U_μ и воспользоваться нормировкой $U^\mu U_\mu = 1$, то определения скорости можно представить в другом виде:

$$\bar{U}^\mu = \frac{N^\mu}{\bar{U}_\nu N^\nu}, \quad (127)$$

$$\tilde{U}^\mu = \frac{T^{\mu\nu} \tilde{U}_\nu}{\tilde{U}_\rho T^{\rho\sigma} \tilde{U}_\sigma}, \quad (128)$$

более удобным для дальнейшего использования. С помощью вектора гидродинамической скорости, независимо от её конкретного определения, можно ввести следующую тензорную величину:

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu, \quad (129)$$

из определения которой следует, что $\Delta^{\mu\nu} U_\nu = 0$. Таким образом, этот тензор играет роль проекционного оператора, так как если его свернуть с произвольным вектором, то он уничтожает его часть, параллельную вектору скорости U^μ .

Понятия, связанные с числом частиц и их потоком. Следующая скалярная величина

$$N_a = N_a^\mu U_\mu \quad (130)$$

определяет концентрацию частиц сорта **a**. Так как число частиц является аддитивной величиной, то полная концентрация частиц определяется как

$$N = \sum_a N_a = U_\mu \sum_a N_a^\mu = N^\mu U_\mu. \quad (131)$$

Кроме концентраций определённых сортов частиц, можно ввести их парциальные вклады в общую концентрацию:

$$Y_a = N_a/N. \quad (132)$$

где сумма в правой части берётся по всем процессам поглощения и излучения (n) и рассеяния (k) частицы сорта **a**. Так как уравнение Больцмана в общем виде является интегро-дифференциальным, то на практике часто используются не оно, а его моменты, то есть уравнение Больцмана, проинтегрированное по импульсу частицы **a**. Для получения этих уравнений рассмотрим первые два момента функции распределения частицы:

$$N_a^\mu = \int f_a \frac{p^\mu}{\varepsilon} \frac{dn_a}{V} = \int f_a \frac{p^\mu}{\varepsilon} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (112)$$

$$T_a^{\mu\nu} = \int f_a \frac{p^\mu p^\nu}{\varepsilon} \frac{dn_a}{V} = \int f_a \frac{p^\mu p^\nu}{\varepsilon} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \quad (113)$$

Определённые таким образом, первая величина называется 4-вектором потока частиц сорта **a**, а вторая — тензором энергии-импульса этих частиц. Для получения нулевого момента уравнения Больцмана проинтегрируем его по $d^3p/((2\pi)^3\varepsilon)$. Второе слагаемое в уравнении может быть проинтегрировано по частям:

$$\begin{aligned} m_a \int_{-\infty}^{\infty} F_a^\mu \frac{\partial f_a}{\partial p^\mu} \frac{d^3p}{\varepsilon (2\pi)^3} &= \frac{m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} F_a^\mu \frac{\partial f_a}{\partial p^\mu} \delta(p^\nu p_{a\nu} - m_a^2) d^4p = \\ &= -\frac{m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f_a \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left[F_a^\mu \delta(p^\nu p_{a\nu} - m_a^2) \right] d^4p = \\ &= -\frac{m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_a}{\varepsilon} \frac{\partial F_a^\mu}{\partial p^\mu} d^3p + \frac{2m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f_a F_a^\mu p_{a\mu} \frac{\delta(p^\nu p_{a\nu} - m_a^2)}{p^\nu p_{a\nu} - m_a^2} d^4p, \end{aligned} \quad (114)$$

где $\delta(x) - \delta$ -функция Дирака, $\delta'(x) = -\delta(x)/x$ и предполагалось, что $f_a \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Далее мы будем предполагать, что 4-мерный вектор силы удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial F_a^\mu}{\partial p^\mu} = 0, \quad F_a^\mu p_\mu = 0. \quad (115)$$

Интегрирование правой части уравнения Больцмана даёт полное изменение числа частиц сорта **a** в единице объёма за счёт всех процессов излучения и поглощения. Реакции рассеяния не дают вклад в изменение числа частиц, в чем можно непосредственно убедиться, сделав замены $p_{d_i}^\mu \leftrightarrow p_{d_i'}^\mu$ и $p_a^\mu \leftrightarrow p_a'^\mu$ во втором слагаемом интеграла (110). Таким образом, нулевой момент уравнения Больцмана для каждой из частиц сорта **a**

может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{\partial N_a^\mu}{\partial x^\mu} = \Gamma_a^{(ea)}, \quad (116)$$

$$\Gamma_a^{(ea)} = \sum_n \int \frac{|S_{if}|_{a_n}^2}{\tau V} \prod_{\alpha,\beta} [(1 \mp f_a) f_{c\beta} (1 \mp f_b) - f_a f_{b\alpha} (1 \mp f_{c\beta})] dn_a dn_{b\alpha} dn_{c\beta}, \quad (117)$$

где $\Gamma_a^{(ea)}$ имеет смысл полного изменения числа частиц сорта **a** в единице объёма в единицу времени за счёт элементарных процессов.

Для получения первого момента уравнения Больцмана проинтегрируем его по $p^\nu d^3p / ((2\pi)^3 \varepsilon)$. Второе слагаемое в уравнении может быть проинтегрировано по частям:

$$\begin{aligned} m_a \int_{-\infty}^{\infty} p^\nu F_a^\mu \frac{\partial f_a}{\partial p^\mu} \frac{d^3p}{\varepsilon (2\pi)^3} &= \\ &= -\frac{m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_a}{\varepsilon} \left[F_a^\nu + p^\nu \frac{\partial F_a^\mu}{\partial p^\mu} \right] d^3p + \\ &+ \frac{2m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} f_a p^\nu F_a^\mu p_{a\mu} \frac{\delta(p^\tau p_{a\tau} - m_a^2)}{p^\tau p_{a\tau} - m_a^2} d^4p, \end{aligned}$$

Интегрирование правой части уравнения Больцмана даёт полное изменение энергии-импульса частиц сорта **a** в единице объёма за счёт всех элементарных процессов. Таким образом, первый момент уравнения Больцмана получаем в следующем виде:

$$\frac{\partial T_a^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{m_a}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_a}{\varepsilon} F_a^\nu d^3p = \mathcal{P}_a^{(ea)\nu} + \mathcal{P}_a^{(sc)\nu}, \quad (118)$$

$$\mathcal{P}_a^{(ea)\nu} = \sum_n \int \frac{|S_{if}|_{a_n}^2}{\tau V} p^\nu \prod_{\alpha,\beta} [(1 \mp f_a) f_{c\beta} (1 \mp f_b) - f_a f_{b\alpha} (1 \mp f_{c\beta})] dn_a dn_{b\alpha} dn_{c\beta}, \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a^{(sc)\nu} &= \sum_k \int \frac{|S_{if}|_{a_k}^2}{\tau V} (p_a^{\nu'} - p^\nu) \prod_{\gamma} f_a (1 \mp f_a') \times \\ &\times f_{a_\gamma} (1 \mp f_{a_\gamma}') dn_a dn_a' dn_{a_\gamma} dn_{a_\gamma}'. \end{aligned} \quad (120)$$

50

Хотя иногда используются и более высокие моменты уравнения Больцмана, для подавляющего большинства задач достаточно приведённых первых двух моментов.

3.2 Кинетика и гидродинамика

Гидродинамический подход к описанию непрерывной среды, в отличие от кинетического, не предполагает точного знания функций распределения, а именно распределение частиц по импульсам. Поэтому переход к такому описанию сводится к усреднению функций распределения по импульсам частиц и переход к макроскопическим величинам, характеризующим среду. Основными величинами, связывающими кинетику и гидродинамику, являются первые два момента функции распределения:

$$N_a^\mu = \int f_a \frac{p^\mu}{\varepsilon} \frac{dn_a}{V} = \int f_a \frac{p^\mu}{\varepsilon} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (121)$$

$$T_a^{\mu\nu} = \int f_a \frac{p^\mu p^\nu}{\varepsilon} \frac{dn_a}{V} = \int f_a \frac{p^\mu p^\nu}{\varepsilon} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (122)$$

которые имеют смысл соответственно 4-вектора потока частиц сорта **a** и тензора их энергии импульса. В том случае, если среда состоит из нескольких компонент, полный поток частиц среды и тензор ее энергии-импульса определяются как

$$N^\mu = \sum_a N_a^\mu, \quad (123)$$

$$T^{\mu\nu} = \sum_a T_a^{\mu\nu}, \quad (124)$$

где сумма берётся по всем сортам частиц среды.

Кроме введённых величин, для макроскопического описания среды необходимо ввести поле 4-вектора, называемого гидродинамической скоростью U^μ , для которого по определению $U^\mu U_\mu = 1$. Однако выбор этого вектора является неоднозначным, и существует несколько определений гидродинамической скорости. В релятивистской гидродинамике обычно используют два определения:

$$\bar{U}^\mu = \frac{N^\mu}{\sqrt{N^\nu N_\nu}}, \quad (125)$$

$$\tilde{U}^\mu = \frac{T^{\mu\nu} \tilde{U}_\nu}{\sqrt{\tilde{U}_\rho T^{\rho\sigma} T_{\sigma\tau} \tilde{U}^\tau}}, \quad (126)$$

51