

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. А. Добрынина, Е. Н. Нарынская

# РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ И ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Учебное пособие

*Рекомендовано*

*Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по направлению Физика*

Ярославль  
ЯрГУ  
2015

**УДК 530.145(075)**

**ББК В314я73**

**Д57**

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2015 года*

Рецензенты:

С. И. Годунов, кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудник НИЦ «КИ» ФГБУ «ГНЦ РФ ИТЭФ»;  
Ярославский Филиал Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки Физико-технологического  
института Российской академии наук

**Добрынина, Александра Алексеевна.**

**Д57**

Радиационные поправки и теория перенормировок :  
учебное пособие / А. А. Добрынина, Е. Н. Нарынская ;  
Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ,  
2015. – 101 с.

ISBN 978-5-8397-1066-5

В данном учебном пособии рассматриваются основные вопросы теории радиационных поправок и перенормировок в квантовой электродинамике. Материал представлен в виде задач с подробным решением и анализом полученных результатов.

ISBN 978-5-8397-1066-5

**УДК 530.145(075)**

**ББК В314я73**

**©ЯрГУ, 2015**

## Предисловие

Данное учебное пособие подготовлено с целью помочь студентам глубже и полнее усвоить понятийную систему и сложный аппарат, который лежит в основе теории радиационных поправок и перенормировок в квантовой электродинамике. Представленный в пособии материал направлен на приобретение студентами умений и навыков по выполнению сложных вычислений в теории электромагнитных взаимодействий.

Учебное пособие состоит из введения, трех глав и заключения.

Во введении дается общее представление о теории радиационных поправок, а также приводится справочный материал, необходимый для построения математического аппарата теории радиационных поправок и перенормировок. Использование математического аппарата подробно иллюстрируется на примерах, разобранных в заданиях к данному разделу. Результаты, полученные во введении, используются в последующих главах пособия.

Первая глава посвящена основным вопросам теории перенормировок. В ней подробно разбирается перенормировка массы электрона, его волновой функции и волновой функции фотона, вычисляются электронный и фотонный пропагаторы в импульсном представлении, вершинная функция в однопетлевом приближении, собственнно-энергетическая диаграмма фотона в однопетлевом приближении, поляризационный оператор фотона в двухпетлевом приближении.

Во второй главе вычисляются формфактор электрона в однопетлевом приближении, аномальный магнитный момент электрона, радиационные поправки к закону Кулона.

В третьей главе рассматриваются приложения теории перенормировок и радиационных поправок к исследованию электрослабых процессов: вычисляется сечение резонансного рассеяния, вероятность радиационного распада хиггсовского бозона  $H \rightarrow 2\gamma$  в рамках Стандартной модели, вероятность радиационного распада фермиона с нарушением аромата  $f_i \rightarrow f_j + \gamma$  в модели электрослабого взаимодействия со смешиванием, аномальный магнитный момент заряженного лептона, обусловленный тяжелыми векторными  $W$ - и  $Z$ -бозонами и т. д.

После введения и каждой главы приводятся задания для са-

мостоятельной работы, решение которых позволит повторить и закрепить изложенный в основном тексте пособия материал.

Список литературы в конце пособия включает в себя перечень изданий, использованных при составлении данного пособия и рекомендованных для более глубоко самостоятельного изучения отдельных вопросов.

Данное учебное пособие построено в соответствии с программой дисциплины «Радиационные поправки и теория перенормировок» и основано на опыте преподавания данной дисциплины.

Авторы выражают искреннюю признательность заведующему кафедрой теоретической физики А. Я. Пархоменко за ценные замечания и предложения.

# Введение

Радиационные поправки — это вклады в физические величины, возникающие при учете взаимодействия реальных частиц с виртуальными (электромагнитным полем и заряженными фермионами в случае квантовой электродинамики).

В классической физике при описании движения твердого тела вводятся параметры, характеризующие макроскопические свойства этого тела, например масса  $m$ , электрический заряд  $q$  и т. д., которые остаются неизменными характеристиками при учете взаимодействий. В отличие от них тело обладает также динамическими характеристиками, такими как импульс или энергия, изменение которых приводит к движению тела.

В квантовой теории поля ситуация существенно другая. Любая частица находится в непрерывном взаимодействии с другими частицами, причем если частицы материи непрерывно испускают и поглощают виртуальные частицы — кванты переносчиков взаимодействий, то и переносчики могут взаимодействовать не только с виртуальными квантами материи, но и сами с собой. Учет такого типа эффектов является проявлением влияния квантово-полевого вакуума на физические характеристики частиц, а именно: массу частицы, ее заряд, магнитный момент. Поэтому при проведении расчетов с участием квантовых полей нужно пользоваться не фиксированными значениями массы  $m_0$  и заряда  $q_0$  (затравочными параметрами теории), а их эффективными значениями  $m = m_0 + \delta m$  и  $q = q_0 + \delta q$ , учитывающими поправки от взаимодействий. В данном случае именно масса  $m$  и заряд  $q$  являются результирующими, физически наблюдаемыми массой и зарядом соответственно. Если в теории имеется малый параметр, то поправки  $\delta m$  и  $\delta q$  можно вычислять по теории возмущения в виде ряда по этому параметру. При первых попытках вычислить поправки к массе и заряду электрона физики столкнулись с проблемой расходимостей, т. е. вычисленные поправки оказались бесконечными. Причина расходимости кроется в нескомпенсированном интегрировании по импульсам виртуальных частиц.

Действительно, в общем случае амплитуда квантового процесса может быть представлена в виде интеграла по импульсам

виртуальных частиц:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p_i, p_f, p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ = \int dp_1 dp_2 \dots dp_n F(p_i, p_f, p_1, p_2, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (0.1)$$

где  $p_i$  и  $p_f$  — импульсы начальных и конечных частиц,  $p_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — виртуальные импульсы, а подынтегральная функция  $F(p_i, p_f, p_1, p_2, \dots, p_n)$  представляет собой произведение пропагаторов, по импульсам которых и проводится интегрирование, и констант связи, соответствующих вершинным функциям диаграммы. Число интегрирований  $n$  в выражении (0.1) равно числу петель в диаграмме рассматриваемого процесса.

Поведение пропагаторов виртуальных части при больших значениях импульсов может привести к ультрафиолетовой расходимости интегралов по этим импульсам. Действительно, при  $p \rightarrow \infty$  поведение пропагатора в общем случае можно описать следующей функцией:

$$\int d^N p \frac{p^a}{(p^2)^b} = \int \frac{d^N p}{p^{2b-a}}.$$

Отметим, что подынтегральное выражение имеет размерность  $D$ , называемую *индексом сходимости*:

$$D = \dim \left\{ \frac{d^N p}{p^{2b-a}} \right\},$$

которая определяет поведение интеграла при больших импульсах. Интеграл при  $p \rightarrow \infty$  будет сходиться при условии  $D < 0$ , в противном случае интеграл расходится следующим образом:

- $D = 0$ : интеграл имеет вид  $\int dp/p$  и расходится логарифмически;
- $D = 1$ : интеграл имеет вид  $\int dp$  и расходится линейно;
- $D = 2$ : интеграл имеет вид  $\int p dp$  и расходится квадратично и т. д.

В случае возникновения подобного рода интегралов матричный элемент процесса, а значит, и значение соответствующей

ему наблюдаемой величины могут оказаться расходящимися, т. е. несуществующими, в силу недостаточно быстрого убывания подынтегрального выражения при больших значениях виртуальных импульсов, или, другими словами, бесконечно большого вклада малых расстояний. Ультрафиолетовые расходимости являются типичными для матричных элементов квантовой теории поля, вычисляемых в высших порядках теории возмущений.

Однако вероятности и сечения реальных процессов в физике частиц, которые измеряются в эксперименте, имеют конечные значения, это указывает на то, что после вычисления измеряемой характеристики процесса бесконечности в ней быть не должно. Для устранения расходимостей используют вспомогательную процедуру регуляризации расходящихся интегралов, которая делает промежуточные вычисления конечными. Физиками используется несколько видов регуляризации. В данном пособии для вычисления проблемных интегралов будет использован метод размерной регуляризации, который состоит в том, что интеграл по четырехмерному пространству импульсов виртуальных частиц формально заменяется интегралом по пространству произвольной размерности  $N = 4 - 2\varepsilon$ . Параметр  $\varepsilon$  считается малым и положительно определенным и в конце вычисления он полагается равным нулю, а вычисляемое выражение при этом стремится к конечному значению. Процедуру устранения таких расходимостей в процессе вычисления и введения физических квантовых полей с конечным набором физически измеряемых характеристик и называют перенормировкой квантовой теории. Квантовая электродинамика — перенормируемая теория.

Далее будут рассмотрены некоторые общие вопросы, знание которых необходимо для математического построения теории перенормировок и вычисления радиационных поправок.

## **Естественная система единиц**

В пособии используется естественная система единиц (далее – ЕСЕ), в которой такие фундаментальные константы, как скорость света  $c$  и постоянная Планка  $\hbar$ , выбираются в качестве масштаба физических величин и, следовательно, полагаются равными единице,  $c = \hbar = 1$ . ЕСЕ является удобной в теоретической

физике, так как при расчётах в этой системе формулы не загромождаются постоянной Планка и скоростью света, а размерности основных физических величин могут быть сведены к одной размерности, например к размерности массы.

Проверим это утверждение. Единицами измерения основных физических величин в системе СГС являются:

- единица измерения массы  $[m] = \text{грамм}$
- единица измерения длины  $[l] = \text{сантиметр}$
- единица измерения времени  $[t] = \text{секунда}$

и размерность любой физической величины  $A$  может быть выражена через эти основные величины. Например, для размерностей энергии  $E$  и силы  $F$  в системе СГС получаем:

$$[E] = \text{эрг} = \text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}, \quad [F] = \text{дина} = \text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

В обозначениях основных физических величин размерность произвольной физической величины  $A$  имеет вид:

$$[A] = [m^\alpha l^\beta t^\gamma], \quad (0.2)$$

где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – вещественные числа.

Домножим слева и справа равенство (0.2) на произведение  $[\hbar^a c^b]$ :

$$[A \hbar^a c^b] = [m^{\alpha+a} l^{\beta+2a+b} t^{\gamma-a-b}],$$

где в правой части равенства учтено, что размерности постоянной Планка и скорости света в системе СГС выражаются через размерности основных величин следующим образом:

$$[\hbar] = [m l^2 t^{-1}], \quad [c] = [l t^{-1}].$$

Поскольку произведение  $\hbar^a c^b$  в ЕСЕ равно 1, то, чтобы свести размерность величины  $A$  в ЕСЕ к размерности массы, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} \beta + 2a + b = 0 \\ \gamma - a - b = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = -(\beta + \gamma) \\ b = \beta + 2\gamma, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$[A \hbar^{-(\beta+\gamma)} c^{\beta+2\gamma}] = m^{\alpha-\beta-\gamma}. \quad (0.3)$$



Учитывая, что в ЕСЕ постоянная Планка и скорость света равны единице  $\hbar = c = 1$ , а значит, и

$$\hbar^{-(\beta+\gamma)} c^{\beta+2\gamma} = 1,$$

получаем, что размерность величины  $A$  в ЕСЕ, выраженная в массах, определяется выражением:

$$[A]_{\text{ЕСЕ}} = [m^{\alpha-\beta-\gamma}]. \quad (0.4)$$

Используя (0.2) и (0.4), выразим размерности некоторых физических величин в ЕСЕ через размерность массы:

- длина:  $[l] = [m^0 l^1 t^0] = [m^{-1}]$ , ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ )
- время:  $[t] = [m^0 l^0 t^1] = [m^{-1}]$ , ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$ )
- энергия:  $[E] = [m^1 l^2 t^{-2}] = [m]$ , ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = -2$ )
- импульс:  $[p] = [m^1 l^1 t^{-1}] = [m]$ , ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -1$ )
- сила:  $[F] = [m^1 l^1 t^{-2}] = [m^2]$ , ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -2$ )
- давление:  $[P] = [m^1 l^{-1} t^{-2}] = [m^4]$ , ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = -2$ ) и т. д.

Для возврата в систему СГС необходимо результат, полученный в ЕСЕ, умножить на обратный фактор из (0.3), равный  $\hbar^{(\beta+\gamma)} c^{-(\beta+2\gamma)}$ . При этом выражение для физической величины  $A$  в этой системе будет иметь вид:

$$A = \hbar^{(\beta+\gamma)} c^{-(\beta+2\gamma)} A_{\text{ЕСЕ}}. \quad (0.5)$$

Из (0.5) для основных физических величин получаем связь между системой СГС и ЕСЕ в виде:

- длина:  $l = \hbar c^{-1} \cdot l_{\text{ЕСЕ}}$
- время:  $t = \hbar c^{-2} \cdot t_{\text{ЕСЕ}}$
- энергия:  $E = c^2 \cdot E_{\text{ЕСЕ}}$
- импульс:  $p = c \cdot p_{\text{ЕСЕ}}$
- сила:  $F = \hbar^{-1} c^3 \cdot F_{\text{ЕСЕ}}$

- давление:  $P = \hbar^{-3} c^5 \cdot P_{\text{ЕСЕ}}$

Результаты вычислений в квантовой электродинамике удобно нормировать на массу электрона, и в этом случае для перевода численных результатов, полученных в ЕСЕ, к обычным размерностям достаточно вычислить переходные коэффициенты для каждой величины, используя значения:

$$m_e \simeq 9,11 \cdot 10^{-28} \text{ г}, \quad \hbar \simeq 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}, \quad c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

В частности, для длины и времени получаем следующие коэффициенты:

- длина:  $[l] = \frac{1}{m_e} = \frac{\hbar}{m_e c} \simeq 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см}$
- время:  $[t] = \frac{1}{m_e} = \frac{\hbar}{m_e c^2} \simeq 1,29 \cdot 10^{-21} \text{ с}.$

Используя вышеизложенное, легко найти коэффициенты перехода из ЕСЕ в систему СГС для любых физических величин.

#### 4-векторы и матрицы Дирака

Все четырехмерные обозначения используются в Фейнмановской метрике, когда скалярное произведение 4-векторов имеет вид:  $A_\mu B^\mu = A_\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A_0 B_0 - \vec{A} \vec{B}$ , что соответствует метрическому тензору:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (0.6)$$

Далее у 4-векторов индексы будут выписываться на одной высоте (внизу) и, только когда будет необходимо перейти к трехмерным обозначениям, немые индексы будут «разведены» на разные высоты.

При вычислениях нам потребуются матрицы Дирака  $\gamma_\mu$ , которые будем использовать в стандартном представлении:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} O & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & O \end{pmatrix}, \quad (0.7)$$

где  $\vec{\sigma}$  – матрицы Паули,  $O$  и  $I$  – матрицы размерности  $(2 \times 2)$ :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правила работы с этими матрицами определяются перестановочными соотношениями:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu}, \quad (0.8)$$

с помощью которых можно редуцировать число матриц в произведениях:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\mu &= 4, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= -2 \gamma_\nu, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu &= 4 g_{\nu\rho}, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu &= -2 \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\mu &= 2 (\gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\sigma \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu). \end{aligned} \quad (0.9)$$

Введём матрицу  $\gamma_5$  вида:

$$\gamma_5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma_5)^2 = I, \quad (0.10)$$

которая антикоммутирует с любой из матриц Дирака:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0.$$

Из определений (0.7) и (0.10) нетрудно заметить, что след каждой из матриц Дирака, так же как и след матрицы  $\gamma_5$ , равен нулю:

$$Sp(\gamma_\mu) = 0, \quad Sp(\gamma_5) = 0.$$

Используя перестановочные соотношения (0.8), нетрудно по-

лучить выражения, определяющие следы от произведений  $\gamma$ -матриц:

$$\begin{aligned}
Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4 g_{\mu\nu}, \\
Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= 4 (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}), \\
Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5) &= 4i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\
Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta) &= g_{\mu\nu} Sp(\gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta) - \\
&\quad - g_{\mu\rho} Sp(\gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta) + g_{\mu\sigma} Sp(\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta) - \\
&\quad - g_{\mu\alpha} Sp(\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\beta) + g_{\mu\beta} Sp(\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha), \\
Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) &= -4i (\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} g_{\sigma\beta} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} g_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\beta} g_{\sigma\alpha} - \\
&\quad - \varepsilon_{\mu\nu\sigma\alpha} g_{\rho\beta} + \varepsilon_{\mu\nu\sigma\beta} g_{\rho\alpha} - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} g_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\mu\rho\sigma\alpha} g_{\nu\beta} - \\
&\quad - \varepsilon_{\mu\rho\sigma\beta} g_{\nu\alpha} + \varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta} g_{\nu\sigma} - \varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} g_{\nu\rho} - \varepsilon_{\nu\rho\sigma\alpha} g_{\mu\beta} + \\
&\quad + \varepsilon_{\nu\rho\sigma\beta} g_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta} g_{\mu\sigma} + \varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta} g_{\mu\rho} - \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} g_{\mu\nu}).
\end{aligned} \tag{0.11}$$

След от произведения нечетного числа матриц Дирака равен нулю.

## Операторы полей и пропагаторы

Все операторы полей могут быть представлены в виде разложения по плоским волнам:

$$\Psi(x) = \sum_{\vec{p}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2EV}} \left( \hat{a}_{\vec{p}, \lambda} f_{\vec{p}, \lambda} e^{-i(px)} + \hat{b}_{\vec{p}, \lambda}^+ f_{-\vec{p}, \lambda} e^{i(px)} \right). \tag{0.12}$$

Здесь  $p = (E, \vec{p})$  – 4-вектор энергии-импульса,  $\lambda$  – поляризация,  $f_{\vec{p}, \lambda}$  – спиральная амплитуда в импульсном представлении,  $\hat{a}_{\vec{p}, \lambda}$  – оператор уничтожения частицы с импульсом  $\vec{p}$  и поляризацией  $\lambda$ ,  $\hat{b}_{\vec{p}, \lambda}^+$  – оператор рождения античастицы с импульсом  $\vec{p}$  и поляризацией  $\lambda$ ,  $V$  – нормировочный объем.

Амплитуды  $f_{\vec{p}, \lambda}$  для полей с различным значением спина  $S$  имеют следующий вид:

1. Скалярное и псевдоскалярное поля ( $S = 0$ ):

$$f_{\vec{p}, \lambda} = 1. \tag{0.13}$$

2. Спинорное поле ( $S = 1/2$ ):

$$f_{\vec{p}, \lambda} = u^\lambda(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^\lambda \\ \sqrt{E-m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \varphi^\lambda \end{pmatrix}, \tag{0.14}$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении движения частицы,  $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ .

В случае если биспинорная амплитуда  $u^\lambda(p)$  является собственной функцией оператора проекции спина на направление движения

$$(\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}) u^\lambda(p) = \lambda u^\lambda(p), \quad \lambda = \pm 1,$$

где

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & O \\ O & \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

то она может быть приведена к виду:

$$f_{\vec{p},\lambda} = u^\lambda(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} \varphi^\lambda \\ \lambda \sqrt{E-m} \varphi^\lambda \end{pmatrix}. \quad (0.15)$$

3. Массивные векторные и аксиально-векторные поля ( $S = 1$ ):

$$f_{\vec{p},\lambda} = \varepsilon_\mu^\lambda = \left( \frac{\vec{\varepsilon}^\lambda \cdot \vec{p}}{m}, \quad \vec{\varepsilon}^\lambda + \frac{\vec{p}(\vec{\varepsilon}^\lambda \cdot \vec{p})}{m(E+m)} \right), \quad (0.16)$$

где  $m$  – масса частицы,  $\vec{\varepsilon}^\lambda$  – собственные векторы оператора проекции спина на произвольное направление, задаваемое вектором  $\vec{n}$ :

$$(\vec{S} \cdot \vec{n}) \vec{\varepsilon}^\lambda = \lambda \vec{\varepsilon}^\lambda. \quad (0.17)$$

Выбирая оператор спина в виде:

$$\vec{S} = -i \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

из уравнения (0.17) находим собственные значения  $\lambda = 0, \pm 1$  и соответствующие им собственные векторы  $\vec{\varepsilon}^\lambda$ :

$$\vec{\varepsilon}^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta \cos \varphi \mp i \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi \pm i \cos \varphi, -\sin \theta),$$

$$\vec{\varepsilon}^0 = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

При вычислениях потребуются также пропагаторы полей, которые можно представить в виде четырехкратного интеграла Фурье:

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D(p) e^{-i(p x)} d^4 p, \quad (0.18)$$

где  $D(p)$  – Фурье-образ пропагатора поля, который в общем случае можно записать в следующей форме:

$$D(p) = \frac{i \rho(p)}{p^2 - m^2 + i0}. \quad (0.19)$$

Здесь  $\rho(p)$  – матрица плотности частицы с определённым значением импульса, просуммированная по поляризациям. Для частиц с разным спином матрица плотности имеет следующий вид:

1. Скалярное и псевдоскалярные поля ( $S = 0$ ):

$$\rho(p) = 1. \quad (0.20)$$

2. Спинорное поле ( $S = 1/2$ ):

$$\rho(p) = \sum_{\lambda} u^{\lambda}(p) \bar{u}^{\lambda}(p) = \hat{p} + m, \quad \lambda = \pm 1. \quad (0.21)$$

Здесь и далее знак оператора над 4-вектором обозначает 4-произведение этого вектора с матрицами  $\gamma_{\mu}$ :

$$\hat{p} = \gamma_{\mu} p_{\mu} = (\gamma p).$$

3. Массивные векторное и аксиально-векторное поля ( $S = 1$ ):

$$\rho(p) = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{\lambda} \varepsilon_{\mu}^{\lambda*} = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m^2} \right), \quad \lambda = \pm 1, 0 \quad (0.22)$$

## Оператор эволюции и правила вычисления вероятностей процессов

Оператор эволюции  $S$ , определяющий переход полевого состояния в момент времени при  $t = -\infty$  в состояние при  $t = +\infty$ :

$$|\Phi_{+\infty}\rangle = S |\Phi_{-\infty}\rangle,$$

можно записать в виде  $T$ -произведения:

$$S = T e^{i \int d^4x L_{int}(x)},$$

где  $L_{int}(x)$  – лагранжиан взаимодействия полей, который в спинорной квантовой электродинамике имеет вид:

$$L_{em} = e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi.$$

Здесь  $e$  – элементарный заряд в системе Хевисайда, когда  $e^2 = 4\pi\alpha$ ,  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры,  $\Psi$  – оператор электрон-позитронного поля,  $A_\mu$  – оператор электромагнитного поля.

Матричный элемент этой  $S$ -матрицы определяет переход из некоторого начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$ . Если взаимодействия нет, то  $S$ -матрица является единичной матрицей: каждое состояние переходит само в себя.

Инвариантная амплитуда перехода  $M_{if}$  связана с  $S$ -матричным элементом по правилу:

$$\langle f|S|i \rangle \equiv S_{if} = \frac{i (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f)}{\prod_i \sqrt{2E_i V} \prod_f \sqrt{2E_f V}} M_{if}, \quad (0.23)$$

где  $p_i$  и  $p_f$  – 4-импульсы начального и конечного состояний соответственно, произведения в знаменателе берутся по всем частицам начального  $i$  и конечного  $f$  состояний.

Через инвариантную амплитуду выражаются дифференциальная вероятность перехода из начального состояния  $i$  в группу конечных состояний  $f$ :

$$dW_{if} = \frac{(2\pi)^4 |M_{if}|^2 d\Phi}{2E_i} \quad (0.24)$$

и сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |M_{if}|^2 d\Phi}{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}, \quad (0.25)$$

где  $d\Phi$  – элемент фазового объема:

$$d\Phi = \delta^4(p_i - p_f) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3}. \quad (0.26)$$

Здесь  $n$  – количество частиц в конечном состоянии.

Из формул (0.24) и (0.25) видно, что помимо квадрата амплитуды величину вероятности и сечения рассеяния определяет фазовый объем:

$$\Phi = \int \delta^4(p_i - p_f) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3}. \quad (0.27)$$

Следует отметить, что фазовый объем является релятивистским инвариантом и вычислять его можно в любой системе отсчёта. Например, найдем двухчастичный фазовый объем, когда в конечном состоянии две частицы с одинаковыми массами. Такой объем легко вычисляется в системе, где 4-вектор импульса начальных частиц имеет вид  $p_i^\mu = (p_i^0, \vec{0})$ . В этом случае

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\delta(p_i^0 - E_1 - E_2) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{(2\pi)^6 4E_1 E_2} d^3p_1 d^3p_2 = \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^6} \int \frac{\delta(p_i^0 - 2E_1)}{4E_1} p_1 dE_1 = \frac{1}{4(2\pi)^5} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p_i^2}},\end{aligned}\quad (0.28)$$

где  $m$  – масса частиц в конечном состоянии, а  $p_i^2 = (p_i^0)^2 - \vec{0}^2$  – релятивистский квадрат суммарного 4-импульса начальных частиц.

### **Элемент телесного угла и полный телесный угол в $n$ -мерном евклидовом пространстве**

Для того чтобы найти элемент телесного угла и полный телесный угол в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, сначала рассмотрим сферическую систему координат в 4-мерном пространстве, а затем обобщим полученный результат на  $n$ -мерную систему координат.

Рассмотрим точку  $M$  в 4-мерном пространстве, положение которой определяется декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (рис. 1). Точка  $M'$  на рис. 1 соответствует проекции точки  $M$  на трёхмерное пространство,  $R$  – расстояние от точки  $M$  до начала системы координат,  $R_\perp$  имеет смысл модуля радиус-вектора проекции точки  $M$  на трёхмерное пространство, то есть определяет расстояние от точки  $M'$  до начала системы координат.

Для построения сферической системы координат проведём плоскость через радиус-вектор точки  $M$  и ось  $Ox_4$ , угол между осью  $Ox_4$  и радиус-вектором обозначим как  $\theta_2$ . В этом случае проекции радиус-вектора  $R$  на ось  $Ox_4$  и на трёхмерную систему координат будут определяться выражениями:

$$x_4 = R \cos \theta_2,$$

$$R_\perp = R \sin \theta_2.$$



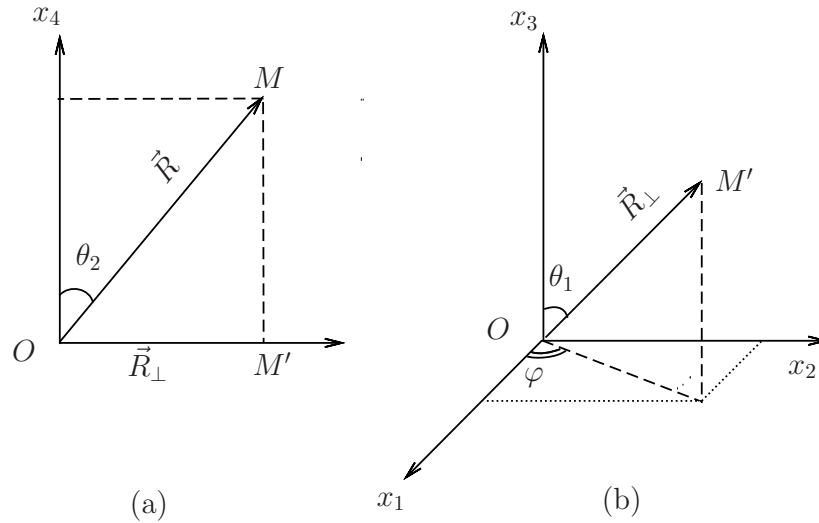


Рис. 1. Точка  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  в 4-мерном пространстве: на рис. 1(а) изображены проекции точки М на ось  $Ox_4$  и на 3-мерное пространство (точка  $M'$ ), на рис.1(б) – точка  $M'$  в 3-мерной системе координат

Заметим, чтобы охватить все точки 4-й оси, необходимо, чтобы  $0 \leq R \leq \infty$ , а  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ .

Координаты  $x_1, x_2, x_3$  будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} x_3 &= R_{\perp} \cos \theta_1 = R \sin \theta_2 \cos \theta_1, \\ x_2 &= R_{\perp} \sin \theta_1 \sin \varphi = R \sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \varphi, \\ x_1 &= R_{\perp} \sin \theta_1 \cos \varphi = R \sin \theta_2 \sin \theta_1 \cos \varphi, \end{aligned}$$

где  $\theta_1$  и  $\varphi$  – углы сферической системы координат, построенной на базе декартовой системы координат 3-мерного пространства.

Для построения сферической системы координат в  $n$ -мерном пространстве, где  $n$  – целое положительное число, необходимо выполнить вышеописанные действия, начиная с выбора  $n$ -й оси и построения плоскости через радиус-вектор точки М и данную ось  $Ox_n$ . При этом

$$\begin{aligned} x_n &= R \cos \theta_{n-2}, \\ R_{\perp} &= R \sin \theta_{n-2}, \end{aligned}$$

где  $R$  – расстояние от точки  $M$  до начала координат, которое выберем в качестве радиальной координаты,  $\theta_{n-2}$  – угол между осью  $Ox_n$  и радиус-вектором,  $R_{\perp}$  – проекция радиуса-вектора точки М на пространство  $(n-1)$  измерения, причём  $0 \leq R \leq \infty$ ,

а  $0 \leq \theta_{n-2} \leq \pi$ . Продолжая такого рода построения, в конце концов, найдем проекцию точки на пространство размерности  $n = 2$ , то есть на плоскость. В итоге получим следующую связь декартовых и сферических координат:

[illegible]

где все углы  $\theta_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n-2$ ) меняются в пределах  $0 \leq \theta_\alpha \leq \pi$ , а угол  $\varphi$  выделен как полярный и меняется в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Выражения (0.29) представляют собой правила перехода от сферических координат к декартовым.

Элемент объема в сферической системе координат находим по общим правилам:

$$d^n V = |J| dR \left( \prod_{\alpha=1}^{n-2} d\theta_\alpha \right) d\varphi, \quad (0.30)$$

где  $J$  – якобиан перехода от декартовых координат к сферическим, который представляет собой определитель матрицы  $(n \times n)$ :

$$J = \left\| \frac{\partial(x_1 x_2 \dots x_n)}{\partial(R \varphi \theta_1 \dots \theta_{n-2})} \right\|. \quad (0.31)$$

Однако непосредственное вычисление определителя в общем случае хотя и возможно, но очень громоздко. Легче воспользоваться более простым способом его вычисления по индукции. Действительно, допустим, мы имеем выражение для сферического элемента объёма в пространстве  $(n - 1)$  измерения. Используя его, попытаемся построить сферический элемент в пространстве  $n$  измерений. Для этого дополним  $(n - 1)$ -мерную сферическую систему координат декартовой осью (ось  $Ox_n$ ), получив таким образом

цилиндрическую систему координат типа  $x_n R_\perp \theta_{n-3} \theta_{n-4} \theta_1 \varphi$ . Причём  $R_\perp$  приобретает смысл величины проекции точки М  $n$ -мерного пространства в пространстве  $(n-1)$ -измерения. Теперь перейдём к  $n$ -мерной сферической системе:

$$x_n = R \cos \theta_{n-2}, \quad (0.32)$$

$$R_\perp = R \sin \theta_{n-2},$$

$$J = \left\| \frac{\partial(x_n R_\perp)}{\partial(R \theta_{n-2})} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta_{n-2} & -R \sin \theta_{n-2} \\ \sin \theta_{n-2} & R \cos \theta_{n-2} \end{array} \right\| = R.$$

Далее определим элемент объёма в сферической системе в случае  $(n-1)$  измерения:

$$d^{n-1} V = R_\perp^{n-2} dR_\perp d\Omega^{(n-1)}, \quad (0.33)$$

где  $d\Omega^{(n-1)}$  –  $(n-1)$ -мерный элемент телесного угла, явный вид которого через углы и требуется найти. Согласно преобразованию (0.31) находим

$$\begin{aligned} dx_n d^{n-1} V &= dx_n dR_\perp R_\perp^{n-2} d\Omega^{(n-1)} = R dR d\theta_{n-2} R_\perp^{n-2} d\Omega^{(n-1)} = \\ &= R^{n-1} dR (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} d\Omega^{(n-1)} = R^{n-1} dR d\Omega^{(n)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем рекуррентную связь:

$$d\Omega^{(n)} = (\sin \theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} d\Omega^{(n-1)}. \quad (0.34)$$

Для пространства трёх измерений элемент телесного угла  $d\Omega^{(3)}$  хорошо известен:

$$d\Omega^{(3)} = \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi.$$

Используя (0.34), можно последовательно найти  $d\Omega^{(4)}$ ,  $d\Omega^{(5)}$  и так до  $d\Omega^{(n)}$ . В результате получим следующее выражение:

$$d\Omega^{(n)} = d\varphi \prod_{\alpha=1}^{n-2} (\sin \theta_\alpha)^\alpha d\theta_\alpha. \quad (0.35)$$

Интегрируя по всем углам, получим полный телесный угол  $\Omega^{(n)}$ :

$$\Omega^{(n)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{\alpha=1}^{n-2} \int_0^\pi d\theta_\alpha (\sin \theta_\alpha)^\alpha = 2 \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (0.36)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Используя свойства гамма-функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

находим ряд значений полного телесного угла для следующих  $n$ :

$$n = 2, \quad d\Omega^{(2)} = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi,$$

$$n = 3, \quad d\Omega^{(3)} = \frac{3\pi}{\Gamma(3/2)} = 4\pi,$$

$$n = 4, \quad d\Omega^{(4)} = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2,$$

$$n = 5, \quad d\Omega^{(5)} = \frac{2\pi^{5/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

### Задания с решением

**Задание 1.** Найти коэффициент перехода из естественной системы единиц в СГС для плотности потерь энергии в единицу времени  $\dot{\varepsilon}$ .

#### *Решение*

Найдем размерность данной физической величины в естественной системе единиц, для чего сначала приведем ее к размерностям основных физических величин системы СГС:

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} = \frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{см}^3 \cdot \text{с}^3} = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-3}. \quad (0.37)$$

Сравнивая результат (0.37) с (0.2), находим значения параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -3,$$

что согласно (0.4) соответствует размерности массы в пятой степени:

$$[\dot{\varepsilon}_{\text{ECE}}] = [m^5].$$

Коэффициент для перехода из естественной системы единиц в СГС находим, используя соотношение (0.5):

$$\dot{\varepsilon} = \hbar^{-4} c^7 \cdot \varepsilon_{\text{ECE}}.$$

В случае вычисления плотности потерь энергии в терминах массы электрона численный коэффициент для перехода в систему СГС определяется выражением:

$$m_e^5 = \frac{m_e^5 c^7}{\hbar^4} \frac{\text{эрг} \cdot \text{см}^3}{\text{с}},$$

что приводит к следующему результату:

$$m_e^5 = 1,1 \cdot 10^{46} \frac{\text{эрг} \cdot \text{см}^3}{\text{с}}.$$

**Задание 2.** Записать условие унитарности  $S$ -оператора через инвариантные амплитуды.

*Решение*

Условие унитарности  $S$ -оператора имеет вид  $S^+ S = 1$ . Введём оператор перехода  $T$ , так что

$$S = 1 + iT, \quad S^+ = 1 - iT^+.$$

Тогда условие унитарности в терминах оператора  $T$  примет вид:

$$T - T^+ = iT^+ T. \quad (0.38)$$

Взяв выражение (0.38) в обкладках между начальным  $|i\rangle$  и конечным  $\langle f|$  векторами состояний и используя условие полноты набора состояний  $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$  и определение эрмитового сопряжения:

$$\langle \Phi_1 | A^+ | \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_2 | A | \Phi_1 \rangle^*,$$

получим:

$$T_{if} - T_{fi}^* = i \sum_n T_{in} T_{fn}^*, \quad (0.39)$$

Определение (0.23) позволяет переписать выражение (0.39) в терминах инвариантных амплитуд:

$$\begin{aligned} M_{if} - M_{fi}^* &= \\ &= i (2\pi)^4 \sum_n \int \prod_n \frac{d^3 p_n}{2E_n (2\pi)^3} M_{in} M_{fn}^* \delta^4(P_i - P_n). \end{aligned} \quad (0.40)$$

В этом представлении учтено правило суммирования по импульсам частиц, определяющих число состояний в элементе  $d^3p$ :

$$\sum_{\vec{p}_n} \Rightarrow \int \prod_n \frac{d^3p_n V}{(2\pi)^3}.$$

Оставшаяся в (0.40) сумма по  $n$  обозначает суммирование по поляризациям и числу частиц в промежуточном состоянии.

**Задание 3.** Найти связь между мнимой частью амплитуды упругого рассеяния вперед и полным сечением рассеяния из заданного начального состояния (оптическая теорема).

*Решение*

Упругое рассеяние означает реакцию типа  $a + b \rightarrow a + b$ , когда сорт частиц в начальном и конечном состояниях совпадает. Рассеяние вперед соответствует процессу, когда угол рассеяния стремится к нулю. При этом полевой вектор конечного состояния  $|f\rangle$  стремится к полевому вектору начального состояния  $|i\rangle$ . В этом случае условие унитарности (0.40) можно переписать в виде:

$$2 \operatorname{Im} M_{ii}(0) = (2\pi)^4 \sum_n \int |M_{in}|^2 \delta^4(P_i - P_n) \prod_n \frac{d^3p_n}{2E_n (2\pi)^3}. \quad (0.41)$$

Используя определение сечения рассеяния через инвариантную амплитуду (0.25), можно получить для мнимой части амплитуды упругого рассеяния вперед следующее выражение:

$$2 \operatorname{Im} M_{ii}(0) = 4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \sigma_{tot}, \quad \sigma_{tot} = \sum_n \sigma_{in}, \quad (0.42)$$

где  $p_1, p_2, m_1, m_2$  — 4-импульсы и массы начальных частиц, а  $\sigma_{tot}$  — полное сечение рассеяния процесса  $a + b \rightarrow a + b$ , просуммированное по всем каналам реакции. Следует отметить, что правая часть выражения (0.42) безразмерна, так как  $[\sigma_{tot}] = \text{см}^2 = [1/m^2]$ , следовательно, амплитуда любого упругого процесса рассеяния безразмерна. Используя понятие кроссинг-симметрии, можно показать, что не только амплитуда рассеяния, но и амплитуда любой реакции, в которой участвуют четыре частицы (четырёххвостка), безразмерна.

**Задание 4.** Доказать, что амплитуда процесса рассеяния, который может происходить через одночастичное состояние, должна иметь полюс, когда квадрат начального 4-импульса  $p_i$  стремится к квадрату массы промежуточной частицы.

*Решение*

Воспользуемся условием унитарности  $S$ -оператора в формуле (0.40), где в правой части выделим явно одночастичное состояние:

$$\begin{aligned} M_{if} - M_{fi}^* &= \\ &= i(2\pi)^4 \sum_{S_n} \int M_{in} M_{fn}^* \delta^4(P_i - P_n) \frac{d^3 p_n}{2E_n(2\pi)^3} + \dots, \end{aligned} \quad (0.43)$$

где суммирование ведётся по спиновым состояниям, а многоточие означает вклад от многочастичных промежуточных состояний. Введём вспомогательную амплитуду:

$$\overleftrightarrow{M}_{if} = M_{if} + M_{fi}, \quad (0.44)$$

представляющую собой сумму амплитуд прямого и обратного процессов. Если к выражению (0.43) прибавить такое же с заменой начального и конечного состояний ( $i \leftrightarrow f$ ), то получим:

$$2 \operatorname{Im}(\overleftrightarrow{M}_{if}) = 2\pi \int \frac{d^3 p_n}{2E_n} R_{if} \delta^4(P_i - P_n) + \dots, \quad (0.45)$$

где введена вещественная функция импульсов:

$$R_{if} = \sum_{S_n} (M_{in} M_{fn}^* + M_{fn} M_{in}^*). \quad (0.46)$$

Используя соотношение

$$\int \frac{d^3 p}{2E} = \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0), \quad (0.47)$$

где  $\theta(p_0)$  – функция Хевисайда, и интегрируя (0.45) по  $d^4 p$ , получаем:

$$\operatorname{Im}(\overleftrightarrow{M}_{if}) = \pi \delta(P_i^2 - m_n^2) R_{if} + \dots, \quad (0.48)$$

где многоточие соответствует вкладу многочастичных состояний.

Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{x + i0} = P \left( \frac{1}{x} \right) - i \pi \delta(x),$$

можно заключить, что  $\overleftrightarrow{M}_{if}$  как аналитическая функция  $p_i^2$  в пределе  $p_i^2 \rightarrow m_n^2$  имеет вид:

$$\overleftrightarrow{M}_{if} = \frac{-R_{if}}{P_i^2 - m_n^2 + i0} + \dots$$

Так как из  $T$ - и  $P$ -инвариантности следует, что с точностью до фазового множителя  $M_{if} = M_{i'f'}$ , где штрихи обозначают противоположные знаки спиральности частиц, то не только  $\overleftrightarrow{M}_{if}$ , но и каждая из амплитуд  $M_{if}$  и  $M_{fi}$  имеет полюс в пределе  $p_i^2 \rightarrow m_n^2$ .

**Задание 5.** Доказать возможность параметризации вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} &= \\ &= (n-1)! \int_0^1 \frac{x_1^{n-2} dx_1 x_2^{n-3} dx_2 \dots x_{n-2} dx_{n-2} dx_{n-1}}{[A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})]^n}, \end{aligned} \quad (0.49)$$

где

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= a_1 x_1 x_2 \dots x_{n-1} + a_2 x_1 x_2 \dots (1 - x_{n-1}) + \\ &+ a_3 x_1 x_2 \dots (1 - x_{n-2}) + \dots + a_{n-1} x_1 (1 - x_2) + a_n (1 - x_1). \end{aligned} \quad (0.50)$$

*Решение*

Прежде всего заметим, что для  $n = 2$  выражение (0.49) легко доказывается прямым интегрированием:

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx_1}{[a_1 x_1 + a_2 (1 - x_1)]^2}. \quad (0.51)$$

Дифференцируя (0.51)  $(k-1)$  раз по  $a_1$  и  $(l-1)$  раз по  $a_2$ , получим выражение более общего вида:

$$\frac{1}{a_1^k a_2^l} = \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!} \int_0^1 \frac{x_1^{k-1} (1-x_1)^{l-1} dx_1}{[a_1 x_1 + a_2 (1-x_1)]^{k+l}}. \quad (0.52)$$



Далее рассуждаем по индукции. Допустим, что выражение (0.49) справедливо для случая  $(n - 1)$ . Докажем, что оно будет тогда справедливо и для  $n$ . Действительно, используя (0.49) для  $(n - 1)$  имеем:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = (n - 2)! \int_0^1 \frac{x_2^{n-3} dx_2 x_3^{n-4} dx_3 \dots dx_{n-1}}{[A(x_2, x_3, \dots, x_{n-1})]^{n-1} a_n}, \quad (0.53)$$

где

$$A(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) = A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})|_{x_1=1}. \quad (0.54)$$

Затем используем (0.52), полагая в нем  $a_1 = A$ ,  $a_2 = a_n$ ,  $k = n - 1$ ,  $l = 1$ . В таких обозначениях равенство (0.52) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[A(x_2, x_3, \dots, x_{n-1})]^{n-1} a_n} &= \\ &= \frac{(n - 1)!}{(n - 2)!(0)!} \int_0^1 \frac{x_1^{n-2} dx_1}{[A(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) + a_n(1 - x_1)]^n}. \end{aligned} \quad (0.55)$$

Нетрудно заметить в (0.50), что

$$A(x_2, x_3, \dots, x_{n-1})x_1 + a_n(1 - x_1) = A(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (0.56)$$

Таким образом, подставляя (0.56) в (0.55) и затем (0.55) в (0.53), получим выражение (0.49) для случая  $n = 1$ . Но, с другой стороны, для  $n = 2$  выражение (0.49) очевидно справедливо, значит, оно справедливо при всех  $n$ , что и требовалось доказать.

**Задание 6.** Составить сводку интегралов в импульсном пространстве. Рассмотреть случай сходящихся и расходящихся интегралов.

### *Решение*

Интегралы по Фурье-переменным имеют вид 4-кратных интегралов от дробно-рациональных функций, возникающих как произведение пропагаторов в диаграммах Фейнмана. Каждый пропагатор имеет знаменатель билинейного вида  $k^2 - 2(kp) - l$  от Фурье-переменной  $k_\mu$ , представляющей собой 4-импульс в петле. С помощью фейнмановской параметризации, рассмотренной в задании 5, произведение знаменателей также приводится к билинейной форме по переменной  $k_\mu$ , возведённой в соответствующую степень. Таким образом, требуется вычислить интегралы следующего вида:

скалярный интеграл:

$$S = \int \frac{d^4 k / (2\pi)^4}{(k^2 - 2kp - l)^a}, \quad (0.57)$$

векторный интеграл:

$$V_\alpha = \int \frac{k_\alpha d^4 k / (2\pi)^4}{(k^2 - 2kp - l)^a}, \quad (0.58)$$

тензорный интеграл:

$$T_{\alpha\beta} = \int \frac{k_\alpha k_\beta d^4 k / (2\pi)^4}{(k^2 - 2kp - l)^a}. \quad (0.59)$$

Интегралы более высокого тензорного ранга встречаются редко.

Начнём вычисления с простейшего скалярного интеграла, затем покажем, что он является производящим для интегралов векторного и тензорного типов. Прежде всего заметим, что для случая  $a > 2$  скалярный интеграл является сходящимся, поэтому сначала рассмотрим именно этот случай. Далее, так как пределы интегрирования по каждой компоненте 4-вектора  $k_\mu$  равны  $\pm\infty$ , то можно сделать замену переменной  $k_\mu \rightarrow k_\mu - p_\mu$ . После такой замены подынтегральное выражение становится сферически симметричным и естественно интегрирование проводить в сферической системе координат:

$$S = \int \frac{d^4 k / (2\pi)^4}{(k^2 - \Lambda)^a}, \quad \Lambda = l + p^2. \quad (0.60)$$

В этом выражении  $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2$ , поэтому прежде, чем вводить сферические координаты, которые мы умеем описывать только в евклидовом пространстве, произведём виковский поворот в комплексной плоскости переменной  $k_0$  (рис. 2).

После поворота контура интегрирования переменная  $k_0$  становится мнимой, то есть  $k_0 = ik_4$ , где  $k_4$  — вещественная переменная. При этом квадрат 4-вектора равен  $k^2 = -k_4^2 - \vec{k}^2$  и становится чисто евклидовым с точностью до знака. Таким образом, скалярный интеграл приобретает вид:

$$S = \frac{(-1)^a i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_E}{(k_E^2 + \Lambda)^a}.$$

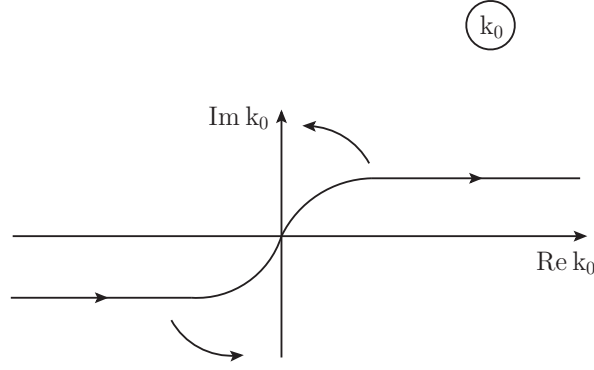


Рис. 2. Виковский поворот в комплексной плоскости переменной  $k_0$

Теперь можно ввести сферическую систему координат и проинтегрировать по телесному углу:

$$S = \frac{(-1)^a i}{(2\pi)^4} \Omega^{(4)} \int \frac{k_E^3 dk_E}{(k_E^2 + \Lambda)^a}. \quad (0.61)$$

Интегрируя по  $k_E$ , окончательно получаем:

$$S = \frac{(-1)^a i}{(4\pi)^2} \frac{1}{(a-1)(a-2)} \frac{1}{(p^2 + l)^{a-2}}, \quad (0.62)$$

где мы использовали значения  $\Omega^{(4)} = 2\pi^2$  и  $\Lambda = p^2 + l$ .

Заметим, что в выражении (0.62) действительно имеется расходимость при  $a = 2$  и  $a = 1$ , которые являются логарифмической и квадратичной расходимостью соответственно, по подсчету размерности подынтегрального выражения (0.60). В этом случае необходимо найти способ регуляризации интеграла, который надо превратить в сходящийся, введя параметр регуляризации. Хуфт предложил в качестве такого параметра выбрать размерность  $n$  импульсного пространства, которую устремим к четырём только в самом конце проводимых вычислений. Для этого в выражении (0.60) нужно заменить

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{d^n k}{(2\pi)^n}, \quad \text{где } n \neq 4.$$

После интегрирования по телесному углу в  $n$ -мерном пространстве для скалярного интеграла имеем:

$$S = \frac{(-1)^a i 2\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{k_E^{n-1} dk_E}{(k_E^2 + \Lambda)^a}, \quad (0.63)$$

где использовалось выражение для полного телесного угла (0.36). Вводя переменную  $t = k_E^2$ , получаем:

$$S = \frac{(-1)^a i \pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{t^{n/2-1} dt}{(t + \Lambda)^a}. \quad (0.64)$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся выражением интеграла в (0.64) через гамма-функции:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{(A + Bx)^{\mu+\nu}} = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{A^\nu B^\nu \Gamma(\mu + \nu)}, \quad (0.65)$$

в котором для нашего случая надо положить:  $\mu = n/2$ ,  $\nu = a - n/2$ ,  $A = \Lambda$ ,  $B = 1$ .

С учетом (0.65) получаем окончательное выражение для искомого скалярного интеграла в  $n$ -мерном импульсном пространстве:

$$S = \int \frac{d^n k / (2\pi)^n}{(k^2 - 2kp - l)^a} = \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(a - \frac{n}{2})}{\Gamma(a)} \frac{1}{(p^2 + l)^{a-n/2}}. \quad (0.66)$$

Нетрудно убедиться, что для  $a > 2$  и  $n = 4$  это выражение совпадает с (0.62). Расходимость при  $a \leq 2$  и  $n \rightarrow 4$  действительно имеет место как полюс гамма-функции при нулевом и отрицательном целом значениях аргумента, однако в промежуточных вычислениях надо удерживать параметр регуляризации  $n \neq 4$ . Выражение (0.66) может быть использовано как производящая функция импульса  $p_\mu$  для векторного интеграла. Для того чтобы получить векторный интеграл (0.58) нужно в выражении для скалярного интеграла (0.66) сделать следующие преобразования: заменить  $a \rightarrow a - 1$ , поделить на  $2(a - 1)$  и продифференцировать по  $p_\alpha$ :

$$\frac{1}{2(a - 1)} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \int \frac{d^n k / (2\pi)^n}{(k^2 - 2kp - l)^{a-1}} = V_\alpha. \quad (0.67)$$

С учетом (0.67) из выражения (0.66) находим искомым векторный интеграл:

$$V_\alpha = \int \frac{k_\alpha d^n k / (2\pi)^n}{(k^2 - 2kp - l)^a} = \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(a - \frac{n}{2})}{\Gamma(a)} \frac{p_\alpha}{(p^2 + l)^{a-n/2}}. \quad (0.68)$$

Интересно отметить, что векторный интеграл (0.68) отличается от скалярного интеграла (0.66) только векторным множителем  $p_\alpha$ . Выполняя выше указанные преобразования для интеграла (0.68), получаем соотношение:

$$\frac{1}{2(a-1)} \frac{\partial}{\partial p_\beta} \int \frac{k_\alpha d^n k / (2\pi)^n}{(k^2 - 2kp - l)^{a-1}} = T_{\alpha\beta}, \quad (0.69)$$

используя которое находим для тензорного интеграла следующее выражение:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{i(-1)^a}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(a - \frac{n}{2})}{\Gamma(a)(p^2 + l)^{a-n/2}} \left( p_\alpha p_\beta - \frac{g_{\alpha\beta}(p^2 + l)}{2(a - \frac{n}{2} - 1)} \right). \quad (0.70)$$

Формулы (0.66), (0.68) и (0.70) составляют искомую сводку интегралов в импульсном пространстве. Выражения для тензоров более высокого ранга можно получить, применяя тот же редукционный метод вычислений.

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти коэффициент перехода из естественной системы единиц в систему СГС для следующих физических величин: импульс, сила, объемная плотность силы, действующая в единицу времени.

2. Получить выражение в импульсном пространстве для тензорного интеграла вида:

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \int \frac{d^n k / (2\pi)^n k_\alpha k_\beta k_\gamma}{(k^2 - 2kp - l)^a}.$$

## 1. Точные пропагаторы и вершинные функции

**Задание 1.1.** Написать уравнение для точного электронного пропагатора в импульсном представлении.

### *Решение*

Представление о точном пропагаторе возникает при вычислении той части радиационных поправок, когда все виртуальные петли сосредоточены на внутренней электронной линии. Примером может служить поправка такого рода к амплитуде эффекта Комптона, изображенного на рис. 3.

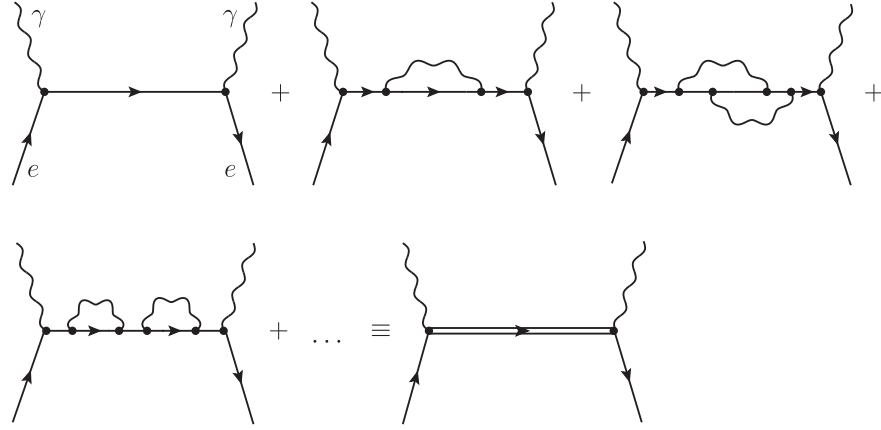


Рис. 3. Диаграммы Фейнмана, описывающие Комптон-эффект: двойная линия соответствует точному пропагатору электрона

Двойной линией на рис. 3 обозначен точный электронный пропагатор, который условно можно представить в виде набора диаграмм Фейнмана на рис. 4.

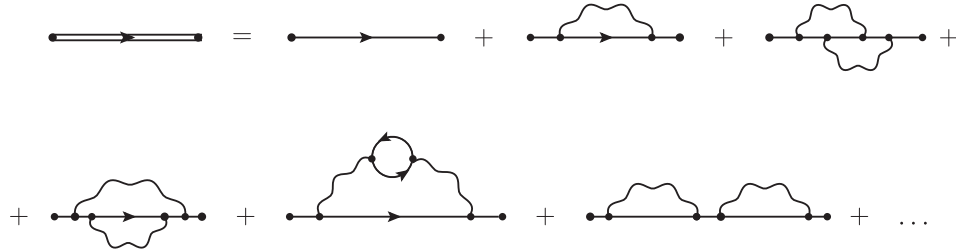
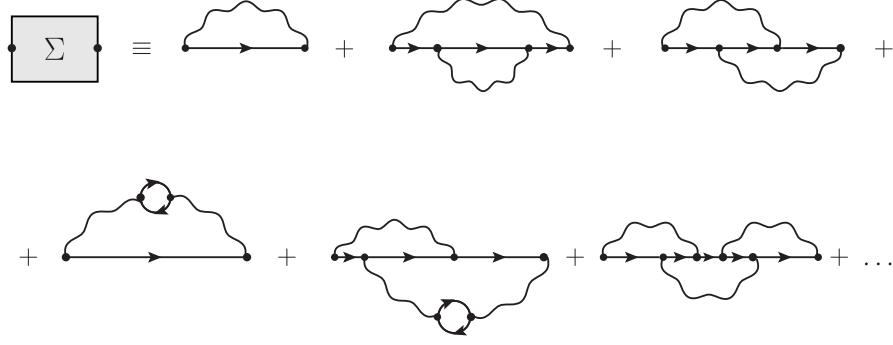


Рис. 4. Диаграммы Фейнмана, определяющие вклад в точный пропагатор электрона

На рис. 4 первое слагаемое соответствует пропагатору в древесном приближении  $S(p)$ , а также исчерпывающе полно представлены диаграммы до четвертого порядка включительно. Многоточие указывает, что ряд продолжается формально до бесконечности (пропагатор точный). Заметим, что последняя диаграмма относится к классу некомпактных диаграмм <sup>1</sup>.

Введем обозначение  $\Sigma$  для набора компактных диаграмм, изображенных на рис.4:

<sup>1</sup>Диаграмма считается некомпактной, если ее можно рассечь на две нетривиальные диаграммы (каждая из которых содержит хотя бы одну вершину), пересекая только одну внутреннюю линию. В противном случае диаграмма считается компактной.



В литературе такой набор диаграмм называют компактными электронными собственнo-энергетическими диаграммами (ЭСЭД). В терминах блока  $\Sigma$  ряд на рис. 4 можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
 \text{---} &= \text{---} + \text{---} \Sigma \text{---} + \text{---} \Sigma \Sigma \text{---} + \dots = \\
 &= \text{---} + \text{---} \Sigma ( \text{---} + \text{---} \Sigma \text{---} + \dots )
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Точный электронный пропагатор в терминах  $\Sigma$

Из рис. 5 видно, что в скобках снова собирается набор диаграмм, соответствующий точному пропагатору электрона, и, как следствие, рис. 4 может быть преобразован к виду:

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \Sigma \text{---}$$

Рис. 6. Набор диаграмм, определяющих точный электронный пропагатор в терминах  $\Sigma$  и  $S(p)$

Диаграммы на рис. 6 представляют собой графическую форму записи уравнения для точного электронного пропагатора в терминах ЭСЭД и древесного пропагатора  $S(p)$ . Обозначив точный пропагатор электрона как  $G^e(p)$ , а ЭСЭД как  $\Sigma(p)$ , получим из рис. 6 аналитическое уравнение в импульсном представлении:

$$G^e(p) = S(p) + G^e(p) \Sigma(p) S(p). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) — матричное уравнение, так как  $G^e(p)$ ,  $S(p)$  и  $\Sigma(p)$  содержат матрицы Дирака. Умножив (1.1) слева на матрицу  $[G^e(p)]^{-1}$ , обратную точному пропагатору, и справа на матрицу  $S^{-1}(p)$ , обратную древесному пропагатору, получим искомое

уравнение:

$$[G^e(p)]^{-1} = S^{-1}(p) - \Sigma(p). \quad (1.2)$$

С учетом явного вида  $S(p)$  и  $S^{-1}(p)$ :

$$S(p) = \frac{i(\hat{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2 + i0}, \quad S^{-1}(p) = -i(\hat{p} - m_0), \quad (1.3)$$

уравнение (1.2) преобразуется к виду:

$$G^e(p) = i[\hat{p} - m_0 - i\Sigma(p)]^{-1}. \quad (1.4)$$

Следует отметить, что поскольку

$$\Sigma(m_0) = \Sigma(p)|_{\hat{p}=m_0} \neq 0,$$

то параметр  $m_0$ , строго говоря, не есть масса электрона, так как из условия унитарности мы уже выводили, что полюс амплитуды процесса, который идет через промежуточное одноэлектронное состояние, должен быть при  $p^2 = m^2$ , а полюс  $G^e(p)$  не находится в точке  $p^2 = m_0^2$ , если  $\Sigma(m_0) \neq 0$ . Таким образом, мы приходим к важной идее перенормировки массы электрона. Физическая масса электрона определяется из условия:

$$m - m_0 - i\Sigma(m) = 0. \quad (1.5)$$

Разность масс

$$\delta m = m - m_0 = i\Sigma(m) \quad (1.6)$$

называется электромагнитным сдвигом массы электрона и определяется значением ЭСЭД на массовой поверхности.

Дадим определение ЭСЭД, опираясь на правила Фейнмана вычисления амплитуд конкретных физических процессов. В данном случае речь идет о процессе перехода  $e \rightarrow e$ :

$$\mathcal{M}_{e \rightarrow e} = -i[\bar{u}(p) \Sigma(p) u(p)]. \quad (1.7)$$

Отметим, что при вычислении амплитуды  $M_{e \rightarrow e}$  надо учитывать не только компактные диаграммы. Коэффициент в (1.7) подбирается так, чтобы слагаемые ряда, изображенного на рис. 4, имели одинаковые коэффициенты, равные единице.



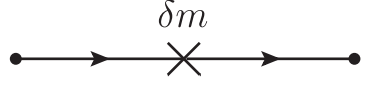
**Задание 1.2.** Провести перенормировку массы электрона и его волновой функции.

*Решение*

В предыдущем задании было показано, что  $m_0$  не может быть физической массой электрона, так как это противоречит условию унитарности. Используя (1.6), можно переписать лагранжиан электрон-позитронного поля, исключив нефизическую массу  $m_0 = m - \delta m$ :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (\hat{p} - m_0) \Psi + e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi = \bar{\Psi} (\hat{p} - m) \Psi + e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \delta m \bar{\Psi} \Psi.$$

Последнее слагаемое называется контрчленом перенормировки массы электрона и порождает новые диаграммы Фейнмана типа  $e \rightarrow e$  перехода



которые, в свою очередь, дают дополнительный вклад в амплитуду:

$$\delta \mathcal{M}_{e \rightarrow e}^{(m)} = \delta m [\bar{u}(p) u(p)] = -i [\bar{u}(p) (i \delta m) u(p)],$$

а значит, и дополнительное слагаемое в ЭСЭД:

$$\delta \Sigma^{(m)} = i \delta m = -\Sigma(m).$$

Обозначим новый набор ЭСЭД, учитывающий это слагаемое, как  $\tilde{\Sigma}(p)$ :

$$\tilde{\Sigma}(p) = \Sigma(p) - \Sigma(m). \quad (1.8)$$

В результате получим, что  $\tilde{\Sigma}(m) = 0$  при  $\hat{p} \rightarrow m$ . С другой стороны, изменяется и древесный пропагатор  $S(p)$ , так как в свободной части лагранжиана  $m_0 \rightarrow m$ . По аналогии для точного пропагатора (1.4) имеем:

$$\tilde{G}^e(p) = i \left[ \hat{p} - m - i \tilde{\Sigma}(p) \right]^{-1}. \quad (1.9)$$

Теперь уже полюс  $\tilde{G}^e(p)$  находится явно на массовой поверхности электрона  $p^2 = m^2$  в соответствии с требованием условия унитарности.

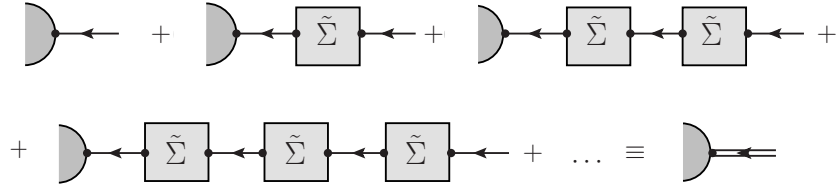


Рис. 7. Набор ЭСЭД на внешней линии: двойная линия соответствует точной волновой функции электрона

Для того чтобы провести перенормировку волновой функции электрона, рассмотрим ЭСЭД на внешней линии. Соответствующие диаграммы Фейнмана имеют следующий вид:

Сгруппируем диаграммы, представленные на рис. 7, и используем алгоритм, аналогичный рассмотренному ранее при вычислении точного пропагатора  $G^e(p)$ . В результате получим следующее графическое уравнение:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with double arrow} &= \text{Diagram with single arrow} + \text{Diagram with semi-circle and arrow} \left( \text{Diagram with single arrow} + \text{Diagram with single arrow and } \tilde{\Sigma} \text{ box} + \dots \right) \text{Diagram with } \tilde{\Sigma} \text{ box and arrow} = \\
 &= \text{Diagram with single arrow} + \text{Diagram with semi-circle and double arrow and } \tilde{\Sigma} \text{ box}
 \end{aligned}$$

Здесь внутренняя двойная линия соответствует точному пропагатору электрона. Переходя от графической формы записи к аналитической, записываем уравнение:

$$U(p) = \left[ 1 + \tilde{G}^e(p) \tilde{\Sigma}(p) \right] u(p) = \sqrt{Z_e} u(p). \quad (1.10)$$

В выражении (1.10) имеется неопределенность, так как на массовой поверхности ( $\hat{p} \rightarrow m$  и  $p^2 = m^2$ ) точный пропагатор  $\tilde{G}^e(p)$  имеет полюс, а ЭСЭД  $\tilde{\Sigma}(p)$  обращается в нуль. Раскрыть эту неопределенность можно также с помощью условия унитарности. Правильный ответ для  $Z_e$  имеет вид:

$$Z_e = \frac{1}{1 - i \partial \Sigma(p) / \partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=m}. \quad (1.11)$$

Однако конкретная величина  $Z_e$  не существенна, а важно, что  $Z_e \neq 1$ . Это соответствует неправильной нормировке точной волновой функции электрона. Более логичным будет слегка перенормировать (с нормировочным коэффициентом, не равным единице) древесную приближенную волновую функцию электрона в

свободной части лагранжиана электрон-позитронного поля:

$$\Psi(x) \rightarrow \sqrt{1 + \delta b} \Psi(x).$$

В результате получим следующий перенормированный лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (\hat{p} - m) \Psi + e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \delta m \bar{\Psi} \Psi + \delta b \bar{\Psi} (\hat{p} - m) \Psi. \quad (1.12)$$

Последнее слагаемое в (1.12) называется контрчленом перенормировки волновой функции электрона и порождает дополнительный член взаимодействия, которому можно поставить в соответствие вершину:

$$\begin{array}{c} \delta b (\hat{p} - m) \\ \bullet \longrightarrow \times \longrightarrow \bullet \end{array} . \quad (1.13)$$

Вклад от вершины (1.13) в амплитуду  $e \rightarrow e$  перехода имеет вид:

$$\delta \mathcal{M}_{e \rightarrow e}^{(\Psi)} = \delta b [\bar{u}(p) (\hat{p} - m) u(p)] = -i [\bar{u}(p) \{i \delta b (\hat{p} - m)\} u(p)],$$

а значит, генерирует дополнительное слагаемое в  $\Sigma(p)$ :

$$\delta \Sigma^{(\Psi)}(p) = i \delta b (\hat{p} - m).$$

С учетом этого слагаемого обозначим набор ЭСЭД как

$$\Sigma_R(p) = \Sigma(p) - \Sigma(m) + i \delta b (\hat{p} - m).$$

Коэффициент  $\delta b$  можно подобрать так, чтобы  $\Sigma_R(p)$  стремилось к нулю как  $(\hat{p} - m)^2$  при  $\hat{p} \rightarrow m$ . Очевидно, что для этого необходимо, чтобы член с  $\delta b$  соответствовал второму члену разложения  $\Sigma(p)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\hat{p} = m$ . Это значит, что  $\delta b$  напрямую связана с первой производной  $\Sigma(p)$  по переменной  $\hat{p}$ :

$$\delta b = i \left. \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m}. \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) выражение для  $\Sigma_R(p)$  преобразуется к виду:

$$\Sigma_R(p) = \Sigma(p) - \Sigma(m) - \left. \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} (\hat{p} - m). \quad (1.15)$$

Точный пропагатор  $G^e(p)$  также изменится, что просто учесть, если в выражении (1.4) сделать замены  $G^e(p) \rightarrow G_R^e(p)$  и  $\Sigma(p) \rightarrow$

$\Sigma_R(p)$ . В результате неопределенность в (1.10) легко раскрывается, так как  $G_R^e(p) \rightarrow (\hat{p} - m)^{-1}$ , а  $\Sigma_R(p) \rightarrow (\hat{p} - m)^2$  при  $\hat{p} \rightarrow m$ . Таким образом, после такой перенормировки волновой функции электрона  $Z_e = 1$ , как это и следует из физических соображений. Отметим, что при  $\hat{p} \rightarrow m$

$$G_R^e(p) \simeq \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0} [1 + \mathcal{O}(\hat{p} - m)]. \quad (1.16)$$

**Задание 1.3.** Вычислить  $\Sigma(p)$  в однопетлевом приближении, то есть в первом порядке по постоянной тонкой структуры  $\alpha$ .

*Решение*

Амплитуда перехода  $e \rightarrow e$  в однопетлевом приближении описывается одной диаграммой Фейнмана:

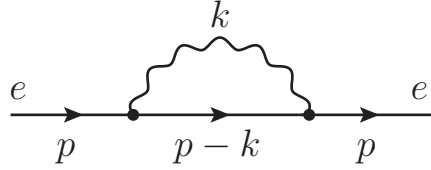


Рис. 8. Диаграмма Фейнмана, соответствующая процессу  $e \rightarrow e$  в однопетлевом приближении

Амплитуда процесса  $e \rightarrow e$ , соответствующая диаграмме на рис. 8, легко выписывается по правилам Фейнмана и имеет вид:

$$M_{e \rightarrow e} = \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \times \quad (1.17)$$

$$\times \bar{u}(p) \gamma_\mu \left[ \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} \right] \gamma^\mu u(p),$$

где  $\lambda$  — «масса фотона», введенная для устранения инфракрасной расходимости, которая имеет место на нижнем пределе интегрирования по  $k^2$ . В конце физических вычислений после учета реального излучения мягких фотонов необходимо устремить параметр  $\lambda$  к нулю,  $\lambda \rightarrow 0$ .

Сравнивая амплитуду (1.17) с (1.7), получаем выражение для  $\Sigma(p)$ :

$$\Sigma(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} \frac{\gamma_\mu [\hat{p} - \hat{k} + m] \gamma_\mu}{(p - k)^2 - m^2}. \quad (1.18)$$

Используя соотношение фейнмановской параметризации

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2) [(k - p)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - 2x(kp) - \ell]^2},$$

где введено обозначение:

$$\ell = x(m^2 - p^2) + (1 - x)\lambda^2,$$

выражение (1.18) может быть преобразовано к виду:

$$\Sigma(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 \frac{dx}{k^2 - 2x(kp) - \ell^2} \gamma_\mu [\hat{p} - \hat{k} + m] \gamma_\mu. \quad (1.19)$$

Интеграл по 4-импульсу в (1.19) может быть вычислен с помощью полученных ранее выражений для скалярного (0.66) и векторного (0.68) интегралов. В результате получаем:

$$S(p) = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(2 - n/2)}{[x m^2 + (1 - x)\lambda^2 - x(1 - x)p^2]^{2-n/2}},$$

$$V_\alpha(p) = x p_\alpha S(p).$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести параметр регуляризации  $\varepsilon$ , характеризующий отличие размерности импульсного пространства  $n$  от размерности четырехмерного пространства:

$$\varepsilon = 2 - \frac{n}{2} \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

После интегрирования по 4-импульсу и с учетом (1.20) выражение (1.19) преобразуется к виду:

$$\Sigma(p) = -\frac{ie^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^{-\varepsilon} m^{2\varepsilon}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{\gamma_\mu [(1 - x)\hat{p} + m] \gamma^\mu dx}{[x + (1 - x)\lambda^2/m^2 - x(1 - x)p^2/m^2]^\varepsilon}. \quad (1.21)$$

Заметим, что в выражении (1.21) нельзя воспользоваться соотношениями (0.9), так как они были получены в четырехмерном пространстве. Однако их легко обобщить на случай  $n$ -мерного

пространства. Для этого выпишем антикоммутационные соотношения матриц Дирака:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} I.$$

Учитывая, что  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = n$ , получаем:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = n I, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = (2 - n) \gamma_\nu.$$

Далее разложим подынтегральное выражение (1.21) в ряд по степеням параметра  $\varepsilon$ , сохраняя только линейный член разложения:

$$\begin{aligned} & \left[ x + (1 - x) \frac{\lambda^2}{m^2} - x(1 - x) \frac{p^2}{m^2} \right]^{-\varepsilon} \simeq \\ & \simeq 1 - \varepsilon \ln \left[ x + (1 - x) \frac{\lambda^2}{m^2} - x(1 - x) \frac{p^2}{m^2} \right]. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что

$$\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \rightarrow 1, \text{ а } \varepsilon^k \Gamma(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ ( } k \geq 2 \text{) при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

получим следующее выражение для ЭСЭД:

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & -\frac{ie^2}{(4\pi)^2} \left\{ (4m - \hat{p}) P(m^2) + \hat{p} - 2m - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx (4m - 2x\hat{p}) \ln \left[ 1 - x + x \frac{\lambda^2}{m^2} - x(1 - x) \frac{p^2}{m^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где произведена замена переменной интегрирования  $x \rightarrow 1 - x$  и введена сингулярная при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция  $P(m^2)$ :

$$P(m^2) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^{-\varepsilon} m^{2\varepsilon}}. \quad (1.23)$$

Полагая в (1.22)  $\hat{p} = m$  и  $p^2 = m^2$ , находим выражение для ЭСЭД на массовой поверхности:

$$\Sigma(m) = -\frac{ie^2 m}{(4\pi)^2} [3P(m^2) + 4], \quad (1.24)$$

где положили  $\lambda = 0$ , так как это не вызывает затруднений. Далее, дифференцируя (1.22) по  $\hat{p}$  (с учетом  $\hat{p}\hat{p} = p^2$ ) и полагая  $\hat{p} = m$ , получаем:

$$\frac{\partial \Sigma(m)}{\partial \hat{p}} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \left[ P(m^2) + 4 \ln \frac{\lambda}{m} + 4 \right]. \quad (1.25)$$

Приведем теперь окончательное выражение для  $\Sigma_R(p)$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_R(p) = & -\frac{i\alpha}{2\pi} \left\{ \left[ \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 1 \right] (\hat{p} - m) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx (2m - x \hat{p}) \ln \left[ \frac{1 - x p^2/m^2}{1 - x} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где учтено, что  $e^2 = 4\pi\alpha$ . Выражение (1.26) справедливо в приближении  $p^2 - m^2 \gg \lambda^2$ , которое на практике всегда выполняется.

Вообще говоря, в расчетах можно было бы и не вводить фиктивную «массу фотона»  $\lambda$ . В этом случае останется зависимость от  $\varepsilon$  в окончательном выражении для  $\Sigma_R(p)$ , которая исчезнет только после учета излучения реальных мягких фотонов (так же, как и зависимость  $\Sigma_R(p)$  от параметра  $\lambda$ ). Выражение для  $\Sigma(m)$  не изменится, так как оно не зависит от  $\lambda$ , а для производной от  $\Sigma(p)$  будем иметь:

$$\left. \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial \hat{p}} \right|_{\hat{p}=m} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} [P(m^2) + 4 + 2P_{\text{IR}}(m^2)], \quad (1.27)$$

где  $P_{\text{IR}}(m^2)$  – это та же самая функция  $P(m^2)$ , определяемая выражением (1.23), при этом надо помнить, что параметр  $\varepsilon$  должен иметь отрицательную вещественную часть, то есть

$$P_{\text{IR}}(m^2) = P(m^2) \Big|_{\text{Re } \varepsilon < 0}.$$

С учетом этого получим для  $\Sigma_R(p)$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Sigma_R(p) = & -\frac{i\alpha}{2\pi} \left\{ [P_{\text{IR}}(m^2) + 1] (\hat{p} - m) - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx (2m - x \hat{p}) \ln \left[ \frac{1 - x p^2/m^2}{1 - x} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Сравнивая выражения (1.26) и (1.28), замечаем, что в определенном смысле  $P_{\text{IR}}(m^2) = \ln(\lambda^2/m^2)$ .

Электромагнитный сдвиг массы электрона определяется формулой:

$$\delta m = \frac{\alpha}{4\pi} m [3P(m^2) + 4] .$$

**Задание 1.4.** Вычислить вершинную функцию  $\Lambda^\alpha(p_1, p_2, q)$  в однопетлевом приближении, определяемую через амплитуду перехода  $e\gamma \rightarrow e$  как:

$$\mathcal{M}_{e\gamma \rightarrow e} = -ie [\bar{u}(p_2) \Lambda^\alpha(p_1, p_2, q) u(p_1)] \varepsilon_\alpha(q), \quad e > 0, \quad (1.29)$$

когда оба электрона внешние.

*Решение*

Амплитуда процесса  $e\gamma \rightarrow e$  определяется в однопетлевом приближении одной диаграммой Фейнмана третьего порядка по константе  $e$ , изображенной на рис. 9:

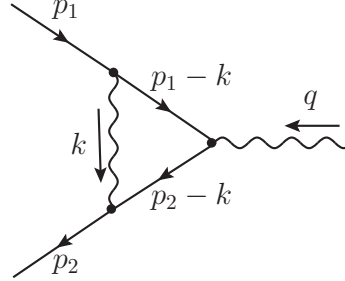


Рис. 9. Диаграмма Фейнмана, описывающая процесс  $e\gamma \rightarrow e$  в однопетлевом приближении

Как можно легко увидеть из рис. 9, в данном процессе 4-импульсы частиц связаны уравнением  $p_1 + q = p_2$ , причем по условию задачи  $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ . По правилам Фейнмана выпишем инвариантную амплитуду, соответствующую этой диаграмме:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{e\gamma \rightarrow e} &= \frac{-ie^3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2} \times \\ &\times \left[ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \frac{\hat{p}_2 - \hat{k} + m}{(p_2 - k)^2 - m^2} \gamma^\alpha \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \gamma^\mu u(p_1) \right] \varepsilon_\alpha(q). \end{aligned}$$



Следовательно, вершинная функция определяется выражением:

$$\begin{aligned} \Lambda^\alpha(p_1, p_2, q) &= \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} \frac{\gamma_\mu (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma^\alpha (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \gamma^\mu}{[(p_2 - k)^2 - m^2] [(p_1 - k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Здесь по фейнмановской параметризации объединяются три множителя:

$$\frac{1}{(k^2 - \lambda^2) [(p_1 - k)^2 - m^2] [(p_2 - k)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{2x dx dy}{[k^2 - 2(k\tilde{p}) - \ell]^3},$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{p}^\mu = x p_y^\mu, \quad p_y^\mu = y p_1^\mu + (1 - y) p_2^\mu, \quad \ell = (1 - x) \lambda^2.$$

В дальнейших вычислениях возникнут определенные комбинации из этих величин вида:

$$\tilde{p}^2 + \ell = x^2 [m^2 - q^2 y(1 - y)] + (1 - x) \lambda^2, \quad q^2 = (p_2 - p_1)^2.$$

Используя фейнмановскую параметризацию, находим:

$$\begin{aligned} \Lambda^\alpha(p_1, p_2, q) &= \\ &= e^2 \int_0^1 2x dx \int_0^1 dy \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_{2\mu} - \gamma_\mu \hat{k}) \gamma^\alpha (2p_1^\mu - \hat{k} \gamma^\mu)}{[k^2 - 2(k\tilde{p}) - \ell]^3}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где учтены уравнения Дирака слева  $\bar{u}(p_2) \hat{p}_2 = m \bar{u}(p_2)$  и справа  $\hat{p}_1 u(p_1) = m u(p_1)$  в правой части этого уравнения, так как по условию задачи электроны находятся на массовой поверхности.

В выражении (1.31) встречается весь спектр импульсных интегралов: скалярный  $S$ , векторный  $V_\alpha$  и тензорный  $T_{\alpha\beta}$ . Заметим, что в скалярном интеграле имеет место инфракрасная расходимость, а в тензорном — ультрафиолетовая:

$$\begin{aligned} S &= \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{1}{x^2 m^2 f(y) + (1 - x) \lambda^2}, \\ V^\alpha &= x [y p_1^\alpha + (1 - y) p_2^\alpha] S \Big|_{\lambda=0}, \\ T^{\alpha\beta} &= \frac{-i}{4(4\pi)^2} \left\{ \frac{2p_y^\alpha p_y^\beta}{m^2 f(y)} + g^{\alpha\beta} [-P(m^2) + 2 \ln x + \ln f(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Здесь введена безразмерная функция переменной  $y$ , зависящая также от квадрата импульса фотона  $q^2$ :

$$f(y) = 1 - \frac{q^2}{m^2} y (1 - y). \quad (1.33)$$

В вершинную функцию выражения (1.32) входят в качестве подынтегральных и интегрируются по  $x$  и  $y$ . По переменной  $x$  интегралы легко вычисляются:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 S x dx &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 m^2 f(y) + (1-x) \lambda^2} \simeq \\ &\simeq \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2m^2 f(y)} \left[ \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \ln f(y) \right], \\ 2 \int_0^1 V^\alpha x dx &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{p_y^\alpha}{m^2 f(y)}, \\ 2 \int_0^1 T^{\alpha\beta} x dx &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{p_y^\alpha p_y^\beta}{m^2 f(y)} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [P(m^2) + 1 - \ln f(y)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Поскольку функция  $f(y)$ , введенная в (1.33), инвариантна относительно замены  $y \rightarrow 1 - y$ , то векторный  $V^\alpha$  и тензорный  $T^{\alpha\beta}$  интегралы упрощаются. Введем вместо импульсов  $p_1$  и  $p_2$  следующие векторы:

$$p^\alpha = p_1^\alpha + p_2^\alpha, \quad q^\alpha = p_2^\alpha - p_1^\alpha, \quad p_y^\alpha = \frac{1}{2} [p^\alpha + (1 - 2y) q^\alpha].$$

Если при интегрировании по  $y$  в числителе встречается  $y$  (но не  $y^2$ ), то возможна замена:

$$y \rightarrow \frac{y}{2} + \frac{1-y}{2} = \frac{1}{2}$$

и векторный и тензорный интегралы преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 V_\alpha x dx &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{p_\alpha}{2m^2 f(y)}, \\
2 \int_0^1 T_{\alpha\beta} x dx &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \times \\
&\times \left\{ \frac{p_\alpha p_\beta + (1-2y)^2 q_\alpha q_\beta}{4m^2 f(y)} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} [P(m^2) + 1 - \ln f(y)] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Подставив эти выражения в (1.31), получим:

$$\begin{aligned}
\Lambda^\alpha(p_1, p_2, q) &= \\
&= \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma^\alpha \left[ P(m^2) - \int_0^1 dy \ln f(y) + 2 \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} - 2 + \right. \right. \\
&+ \left. \left( 2 - \frac{q^2}{m^2} \right) \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} \left( 2 + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \ln f(y) \right) \right] - \frac{\sigma^{\alpha\beta} q_\beta}{m} \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

После перенормировки волновой функции электрона появляется контрчлен, учет которого приводит к тому, что физически наблюдаемая часть вершинной функции определяется равенством:

$$\Lambda_R^\alpha(p_1, p_2, q) = \Lambda^\alpha(p_1, p_2, q) - \Lambda^\alpha(p_1, p_1, 0). \tag{1.37}$$

В нашем случае для  $\Lambda^\alpha(p_1, p_1, 0)$  из (1.36) получается следующее уравнение:

$$\Lambda^\alpha(p_1, p_1, 0) = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \gamma^\alpha \left[ P(m^2) + 4 + 4 \ln \frac{\lambda}{m} \right], \tag{1.38}$$

где было учтено, что  $f(y)|_{q^2=0} = 1$ , и проинтегрировано по переменной  $y$ . Подставив (1.38) в (1.37), получим окончательное

выражение для вершинной функции:

$$\begin{aligned} \Lambda_R^\alpha(p_1, p_2, q) = & \quad (1.39) \\ = & \frac{i\alpha}{4\pi} \left\{ \gamma^\alpha \left[ \left( 2 - \frac{q^2}{m^2} \right) \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} \left[ 2 + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \ln f(y) \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^1 dy \ln f(y) - 6 - 4 \ln \frac{\lambda}{m} + 2 \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} \right] - \frac{\sigma^{\alpha\beta} q_\beta}{m} \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} \right\}. \end{aligned}$$

При  $q^2 \ll m^2$  выражение (1.39) существенно упрощается:

$$\Lambda_R^\alpha(p_1, p_2, q) \simeq -\frac{i\alpha}{3\pi} \gamma^\alpha \left[ \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{8} \right] \frac{q^2}{m^2} - \frac{i\alpha}{4\pi} \frac{\sigma^{\alpha\beta} q_\beta}{m}. \quad (1.40)$$

Формула (1.40) показывает, что перенормированная вершинная функция свободна от ультрафиолетовой расходимости, однако содержит инфракрасную расходимость (зависимость от «массы фотона»  $\lambda$ ). Как и при вычислении ЭСЭД в предыдущей задаче, можно было бы и не вводить  $\lambda$ , однако при этом осталась бы зависимость от  $\varepsilon$  в виде полюсной функции  $P_{\text{IR}}(m^2)$ .

**Задание 1.5.** Написать уравнение для точного фотонного пропагатора в импульсном представлении. Перенормировать волновую функцию фотона.

*Решение*

Точный пропагатор заменяет приближенный при вычислении радиационных поправок, сосредоточенных на внутренней линии, к процессу, идущему через однофотонное состояние (см. рис. (10)).

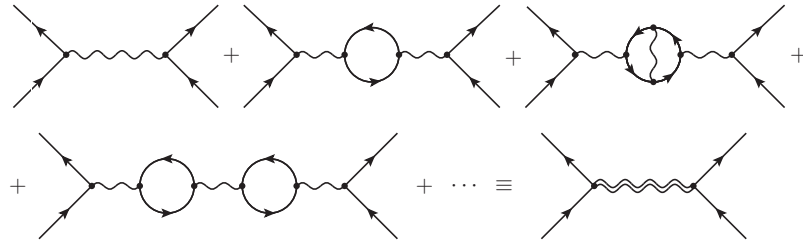


Рис. 10. Диаграммы Фейнмана для процесса, идущего через однофотонное состояние: двойная линия соответствует точному фотонному пропагатору

Точный фотонный пропагатор определяется вкладами диаграмм на рис.11, где первое слагаемое соответствует пропагатору фотона в древесном приближении.

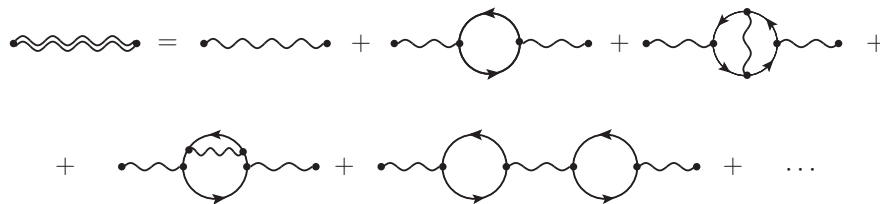
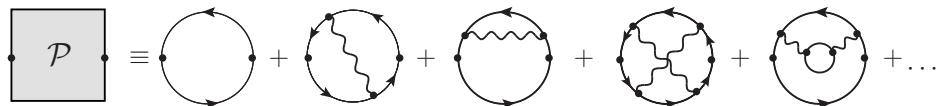


Рис. 11. Диаграммы Фейнмана, определяющие вклад в точный пропагатор фотона

Как и в случае электронного пропагатора, соберем в единый блок сумму всех компактных диаграмм и введем обозначение для этого блока  $\mathcal{P}$ :



Такие диаграммы называются компактными фотонными собственнно-энергетическими диаграммами (ФСЭД).

В терминах ФСЭД точную фотонную линию можно представить в виде диаграмм на рис. 12:

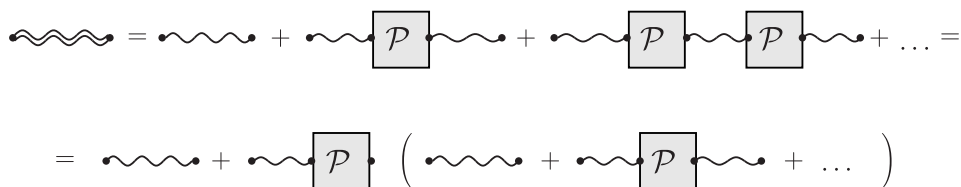


Рис. 12. Точный фотонный пропагатор в терминах  $\mathcal{P}$

Учитывая, что выражение в скобках – точный фотонный пропагатор, получим уравнение в графической форме:



Рис. 13. Набор диаграмм, определяющих точный фотонный пропагатор в терминах  $\mathcal{P}$

Если ввести обозначение для точного пропагатора фотона как  $G^\gamma(k)$ , древесного –  $D(k)$  и ЭСЭД –  $\mathcal{P}(k)$ , то графическое уравнение на рис. 13 можно переписать в следующем аналитическом виде:

$$G_{\mu\nu}^\gamma(k) = D_{\mu\nu}(k) + G_{\mu\rho}(k) \mathcal{P}_{\rho\sigma}(k) D_{\sigma\nu}(k). \quad (1.41)$$

Параметризуя входящие в (1.41) тензорные выражения посредством метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и 4-вектора  $k_\mu$ :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^\gamma(k) &= G^\gamma(k^2) \mathcal{I}_{\mu\nu} + G_\parallel(k^2) \mathcal{L}_{\mu\nu}, \\ D_{\mu\nu}(k) &= D(k^2) \mathcal{I}_{\mu\nu} + D_\parallel(k^2) \mathcal{L}_{\mu\nu}, \\ \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) &= \mathcal{P}(k^2) \mathcal{I}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где введены две тензорные «единицы»:

$$\mathcal{I}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \mathcal{L}_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

обладающие свойствами:

$$(\mathcal{I}\mathcal{L})_{\mu\nu} = 0, \quad (\mathcal{I}\mathcal{I})_{\mu\nu} = \mathcal{I}_{\mu\nu}, \quad (\mathcal{L}\mathcal{L})_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\nu},$$

уравнение (1.41) может быть переписано в алгебраической форме в терминах  $G(k^2)$ ,  $G_\parallel(k^2)$ ,  $D(k^2)$ ,  $D_\parallel(k^2)$  и  $\mathcal{P}(k^2)$  как два независимых уравнения:

$$G^\gamma(k^2) = D(k^2) + D(k^2) G^\gamma(k^2) \mathcal{P}(k^2), \quad G_\parallel(k^2) = D_\parallel(k^2).$$

Заметим, что так как  $D_\parallel(k^2)$  – произвольная функция  $k^2$  по причине калибровочной инвариантности квантовой электродинамики, то и функция  $G_\parallel(k^2)$  произвольна. Для поперечной части  $G^\gamma(k^2)$  получим следующее уравнение:

$$G^\gamma(k^2) = \frac{1}{D^{-1}(k^2) - \mathcal{P}(k^2)} = \frac{-i}{k^2 + i\mathcal{P}(k^2)}, \quad (1.43)$$

где учтено, что  $D^{-1}(k^2) = i k^2$ .

Выражение (1.43) и есть искомое уравнение для точного пропагатора фотона в терминах компактных ФСЭД. Следует отметить, что уравнение такого вида получается, если соответствующим образом ввести  $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ . Естественно определить ФСЭД через амплитуду перехода  $\gamma \rightarrow \gamma$ , которую можно вычислить по стандартным правилам Фейнмана:

$$\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \gamma} = -i \varepsilon_\mu^*(k) \mathcal{P}^{\mu\nu}(k) \varepsilon_\nu(k). \quad (1.44)$$

Следует отметить, что полюс точного пропагатора обязан находиться в точке  $k^2 = 0$ , а для этого необходимо выполнение условия:

$$\mathcal{P}(k^2) \Big|_{k^2=0} = \mathcal{P}(0) = 0. \quad (1.45)$$

Если бы условие (1.45) не выполнялось, то пришлось бы перенормировать «массу фотона» и вводить массовый контрчлен, аналогичный электронному, что противоречит калибровочной инвариантности квантовой электродинамике. Следовательно, при проведении вычисления необходимо следить, чтобы условие (1.45) выполнялось автоматически.

Рассмотрим теперь радиационные поправки на внешней фотонной линии, которые определяются вкладами от диаграмм, представленных на рис. 14:

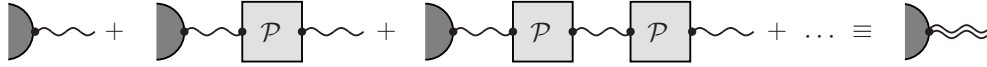


Рис. 14. Набор диаграмм, определяющих вклад во внешнюю фотонную линию

Волновая функция внешнего фотона, изображенная двойной линией на рис. 14, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \text{double wavy line} &= \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{box } P \cdot \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{box } P \cdot \text{box } P \cdot \text{wavy line} + \dots = \\ &= \text{wavy line} + \left( \text{wavy line} + \text{wavy line} \cdot \text{box } P \cdot \text{wavy line} + \dots \right) \cdot \text{box } P \cdot \text{wavy line} \end{aligned}$$

или

$$\text{double wavy line} = \text{wavy line} + \text{double wavy line} \cdot \text{box } P \cdot \text{wavy line}$$

В аналитической форме последнюю цепочку диаграмм можно выразить через функции  $G^\gamma(k^2)$  и  $\mathcal{P}(k^2)$ :

$$\mathcal{E}_\alpha(k) = \varepsilon_\alpha(k) \left[ 1 + G^\gamma(k^2) \mathcal{P}(k^2) \right], \quad (1.46)$$

где введено обозначение  $\mathcal{E}_\alpha(k)$  для точной волновой функции фотона в импульсном пространстве.

Выражение (1.46) содержит неопределенность, так как  $G^\gamma(k^2)$  имеет полюс, а  $\mathcal{P}(k^2)$  равно нулю при  $k^2 = 0$  (напомним, что фотон находится на массовой поверхности). Эту неопределенность можно раскрыть с помощью условия унитарности  $S$ -оператора:

$$\mathcal{E}_\alpha(k) = \sqrt{Z^\gamma} \varepsilon_\alpha(k), \quad Z^\gamma = \frac{1}{1 + i d\mathcal{P}(k^2)/dk^2} \Big|_{k^2=0}. \quad (1.47)$$

Однако нам не существенно конкретное выражение для множителя  $Z^\gamma$ . Важно, что он не равен единице, что противоречит физическому смыслу точной волновой функции. Поэтому, как и в случае электрона, для фотона тоже необходимо произвести перенормировку волновой функции, выполнив замену:

$$A_\mu(x) \rightarrow \sqrt{1 + \delta a} A_\mu(x). \quad (1.48)$$

Из свободного лагранжиана (более точно, из его электромагнитной части) возникает соответствующий контрчлен:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (\hat{p} - m) \Psi + e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \\ & + \delta m \bar{\Psi} \Psi + \delta b \bar{\Psi} (\hat{p} - m) \Psi - \frac{\delta a}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Последнее слагаемое в (1.49) и есть контрчлен перенормировки волновой функции фотона. Он порождает дополнительный вклад в амплитуду  $\gamma \rightarrow \gamma$  перехода:

$$\delta \mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \gamma} = -\delta a \varepsilon_\mu^*(k) [k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}] \varepsilon_\nu(k),$$

и соответственно дополнительный вклад в  $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ . С учетом этого вклада обозначим ФСЭД как

$$\mathcal{P}_R(k^2) = \mathcal{P}(k^2) - i \delta a k^2. \quad (1.50)$$

Теперь можно выбрать  $\delta a$  таким образом, чтобы  $Z^\gamma = 1$  с учетом перенормировки. Из (1.46) видно, что для этого необходимо, чтобы  $\mathcal{P}_R(k^2)$  стремилась к нулю как  $(k^2)^2$  при  $k^2 \rightarrow 0$ , тогда и произведение

$$G^\gamma(k^2) \mathcal{P}_R(k^2) \Big|_{k^2 \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

В результате точная волновая функция фотона  $\mathcal{E}_\alpha$  будет нормирована на единицу:

$$\mathcal{E}_\alpha(k) = \varepsilon_\alpha(k) [1 + G^\gamma(k^2) \mathcal{P}_R(k^2) \Big|_{k^2=0}] = \varepsilon_\alpha(k). \quad (1.51)$$



Из формулы (1.50) находим, что  $\delta a$  необходимо присвоить следующее значение:

$$\delta a = -i \left. \frac{d\mathcal{P}(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=0},$$

тогда  $\mathcal{P}_R(k^2)$  определяется окончательно как разность:

$$\mathcal{P}_R(k^2) = \mathcal{P}(k^2) - \left. \frac{d\mathcal{P}(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=0} k^2. \quad (1.52)$$

**Задание 1.6.** Вычислить собственно-энергетическую диаграмму фотона  $\mathcal{P}(k^2)$  в однопетлевом приближении.

*Решение*

В линейном по постоянной тонкой структуры  $\alpha = e^2/(4\pi)$  приближении ФСЭД  $\mathcal{P}(k^2)$  определяется одной диаграммой Фейнмана (рис. 15).

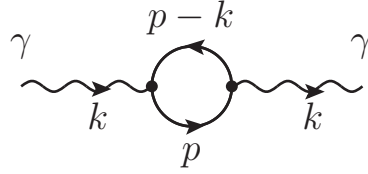


Рис. 15. Собственно-энергетическая диаграмма фотона в однопетлевом приближении

Соответствующая инвариантная амплитуда  $\gamma \rightarrow \gamma$  перехода имеет вид:

$$\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \varepsilon_\alpha^*(k) \int \frac{d^4p \operatorname{Sp} \left\{ \gamma_\alpha (\hat{p} + m) \gamma_\beta (\hat{p} - \hat{k} + m) \right\}}{(p^2 - m^2) [(p - k)^2 - m^2]} \varepsilon_\beta(k).$$

По правилу (1.44) определения  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k)$  находим:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k) = -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\operatorname{Sp} \left\{ \gamma_\alpha (\hat{p} + m) \gamma_\beta (\hat{p} - \hat{k} + m) \right\}}{(p^2 - m^2) [(p - k)^2 - m^2]}. \quad (1.53)$$

Объединим два множителя по правилам параметризации Фейнмана:

$$\frac{1}{(p^2 - m^2) [(p - k)^2 - m^2]} = \int_0^1 \frac{dx}{[p^2 - 2(p\tilde{p}) - \ell]^2},$$

где введены обозначения:

$$\tilde{p}_\alpha = x k_\alpha, \quad \ell = m^2 - x k^2.$$

Вычислив шпуры  $\gamma$ -матриц, получим следующее выражение для ФСЭД:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(k) &= -4e^2 \int_0^1 dx \times \\ &\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta} [m^2 - p^2 + (pk)] + 2p_\alpha p_\beta - p_\alpha k_\beta - p_\beta k_\alpha}{[p^2 - 2(p\tilde{p}) - \ell]^2}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

В выражении (1.54) встречаются все интегралы – от скалярного  $S$  до тензорного  $T_{\alpha\beta}$ , результаты вычислений которых могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{P(m^2)}{f^\varepsilon(x)}, \\ V_\alpha &= x k_\alpha S, \\ T_{\alpha\beta} &= \left[ x^2 k_\alpha k_\beta - \frac{m^2 f(x) g_{\alpha\beta}}{2-n} \right] S, \end{aligned} \quad (1.55)$$

где  $\varepsilon = 2 - n/2$  и введены две величины:

$$f(x) = 1 - \frac{k^2}{m^2} x (1-x), \quad P(m^2) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(4\pi)^{-\varepsilon} m^{2\varepsilon}}.$$

Подставляя (1.55) в (1.54), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(k) &= -\frac{4ie^2}{(4\pi)^2} P(m^2) \times \\ &\times \int_0^1 \frac{dx}{f^\varepsilon(x)} \left\{ g_{\alpha\beta} \left[ m^2 - x^2 k^2 + \frac{n}{2-n} m^2 f(x) + x k^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{2-n} m^2 f(x) + x k^2 \right] + k_\alpha k_\beta (2x^2 - x - x) \right\}. \end{aligned}$$

В этом выражении вычислялась свертка тензора  $T_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$  с учетом того, что  $g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = n$  в рамках метода размерной регуляризации. После приведения подобных членов получаем:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k) = -\frac{8ie^2}{(4\pi)^2} k^2 \left[ g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \int_0^1 \frac{x(1-x) dx}{f^\varepsilon(x)}. \quad (1.56)$$

Отсюда находим скалярную функцию  $\mathcal{P}(k^2)$  согласно определению (1.42):

$$\mathcal{P}(k^2) = -\frac{2i\alpha}{\pi} P(m^2) k^2 \int_0^1 \frac{x(1-x) dx}{f^\varepsilon(x)}. \quad (1.57)$$

Из выражения (1.57) видно, что условие (1.45) выполняется.

Далее вычисляем производную:

$$\left. \frac{d\mathcal{P}(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=0} = -\frac{2i\alpha}{\pi} P(m^2) \int_0^1 x(1-x) dx = -\frac{i\alpha}{3\pi} P(m^2)$$

и согласно (1.52) находим выражение для перенормированного поляризационного оператора:

$$\mathcal{P}_R(k^2) = -\frac{2i\alpha}{\pi} P(m^2) k^2 \int_0^1 x(1-x) [f^{-\varepsilon}(x) - 1] dx.$$

Раскладывая функцию  $f^{-\varepsilon}(x)$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$f^{-\varepsilon}(x) = 1 - \varepsilon \ln f(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

получаем окончательный ответ для  $\mathcal{P}_R(k^2)$ :

$$\mathcal{P}_R(k^2) = \frac{2i\alpha}{\pi} k^2 \int_0^1 x(1-x) \ln \left[ 1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right] dx, \quad (1.58)$$

где учтено, что  $\varepsilon P(m^2) = 1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а члены порядка  $\varepsilon^2$  и выше зануляются в этом пределе.

В приближении малых значений квадрата импульса  $|k^2| \ll m^2$  интеграл (1.58) легко вычисляется и получается простое выражение:

$$\mathcal{P}_R(k^2) \simeq -\frac{i\alpha}{15\pi} \frac{(k^2)^2}{m^2}. \quad (1.59)$$

В другом предельном случае  $|k^2| \gg m^2$  в области отрицательных  $k^2$  для  $\mathcal{P}_R(k^2)$  также может быть получена простая формула:

$$\mathcal{P}_R(k^2) \simeq \frac{i\alpha}{3\pi} k^2 \left[ \ln \frac{|k^2|}{m^2} - \frac{3}{5} \right]. \quad (1.60)$$

**Задание 1.7.** Пренебрегая массой электрона, вычислить поляризационный оператор фотона в двухпетлевом приближении.

*Решение*

В двухпетлевом приближении поляризационный оператор фотона определяется тремя диаграммами, представленными на рис. 16.

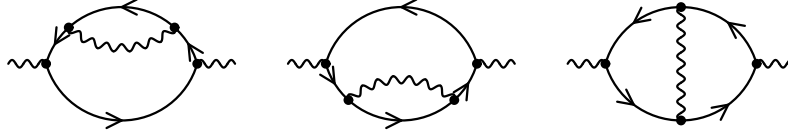


Рис. 16. Диаграммы Фейнмана, определяющие вклад в поляризационный оператор в двухпетлевом приближении

Отсутствие внешних заряженных частиц в рассматриваемых диаграммах приводит к тому, что поляризационный оператор фотона является калибровочно инвариантной величиной. Поэтому при проведении вычислений можно использовать любую калибровку, причем в калибровке Фейнмана расчеты будут наиболее простыми.

Поскольку вклады двух первых диаграмм одинаковы, то достаточно вычислить вклад только одной из них. Обозначим 4-импульс внешнего фотона как  $p^\mu$ , а один из 4-импульсов интегрирования как  $k^\mu$  (см. рис. 17).

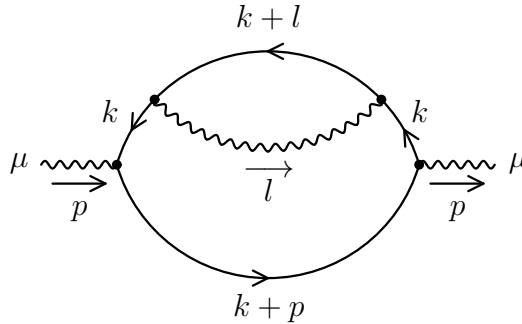


Рис. 17. Вклад в поляризационный оператор от первой диаграммы рис. 16

Верхняя петля представляет собой электронную собственно-энергетическую диаграмму  $\Sigma(k)$  в однопетлевом приближении, вычисленную ранее в задании 1.3. В пренебрежении массой элек-

трона след тензора поляризации фотона, индуцированного данной диаграммой, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \mathcal{P}_1^{(2)\mu\nu}(p) &= \\ &= ie_0^2 \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \text{Sp} \left\{ \gamma_\mu \frac{\hat{k} + \hat{p}}{(k+p)^2} \gamma^\mu \frac{\hat{k}}{k^2} \Sigma(k) \frac{\hat{k}}{k^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Для безмассовых электронов ЭСЭД зависит от выбора калибровки фотона и имеет вид:

$$\begin{aligned} \Sigma(k) &= \frac{e_0^2}{(4\pi)^{N/2}} (-k^2)^{N/2-2} \frac{N-2}{2} \frac{\Gamma(3-N/2) \Gamma^2(N/2-1)}{\Gamma(N-2)} \xi \hat{k} = \\ &= \frac{e_0^2}{(4\pi)^{N/2}} (-k^2)^{N/2-2} \frac{N-2}{2} G_1 \xi \hat{k}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

причем в фейнмановской калибровке, т.е. при  $\xi = 1$ , которая и будет использоваться в дальнейшем, ЭСЭД отлична от нуля. Подставив выражение (1.62) в (1.61), получим:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \mathcal{P}_1^{(2)\mu\nu}(p) &= \\ &= -\frac{ie_0^4}{(4\pi)^{N/2}} G_1 \frac{N-2}{2} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{\text{Sp}\{\gamma_\mu (\hat{k} + \hat{p}) \gamma^\mu \hat{k}\}}{[-(k+p)^2] (-k^2)^{1+\varepsilon}} = \\ &= \frac{ie_0^4}{(4\pi)^{N/2}} G_1 (N-2)^2 \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{2k^2 + 2(kp)}{D_1 D_2^{1+\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

где  $(k+p)^2 = -D_1$  и  $k^2 = -D_2$ . В числителе выражения (1.63) можно исключить скалярное произведение, воспользовавшись соотношением:

$$2(pk) = D_2 - D_1 - p^2. \quad (1.64)$$

Опустив слагаемые с  $D_1$  в числителе (ему будет соответствовать интеграл, не содержащий параметров с размерностью массы и, как следствие, равный нулю) придем к выражению:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \mathcal{P}_1^{(2)\mu\nu}(p) &= \\ &= -\frac{e_0^4 (-p^2)^{1-2\varepsilon}}{(4\pi)^{4-2\varepsilon}} 4(1-\varepsilon)^2 G_1 [G(1, 1+\varepsilon) - p^2 G(1, \varepsilon)], \end{aligned} \quad (1.65)$$

где коэффициенты  $G(n_1, n_2)$  определяются следующим интегралом:

$$\int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2}} = \frac{i}{(4\pi)^{N/2}} (-p^2)^{N/2-n_1-n_2} G(n_1, n_2) \quad (1.66)$$

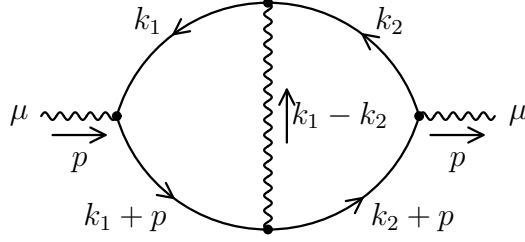


Рис. 18. Вклад в поляризационный оператор от второй диаграммы рис. 16

и обладают свойством симметрии  $G(n_1, n_2) = G(n_2, n_1)$  в силу трансляционной инвариантности интеграла. Более того, в случае если один из аргументов принимает целое отрицательное значение, то  $G(n_1, n_2) = 0$  по причине отсутствия параметра с размерностью массы. Заметим, что использованный нами ранее множитель  $G_1 = G(1, 1)$ .

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{G(n_1, n_2 + 1)}{G(n_1, n_2)} = -\frac{(N - 2n_1 - 2n_2)(N - n_1 - n_2 - 1)}{n_2(N - 2n_2 - 2)}, \quad (1.67)$$

можно легко получить окончательный результат:

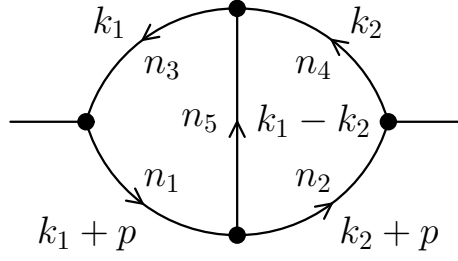
$$g_{\mu\nu} \mathcal{P}_1^{(2)\mu\nu}(p) = \frac{e_0^4 (-p^2)^{1-2\varepsilon}}{(4\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{8(1-\varepsilon)^3}{\varepsilon} G_2, \quad (1.68)$$

где введена константа:

$$\begin{aligned} G_2 &= G_1 G(1, \varepsilon) = \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)(2-3\varepsilon)} \frac{\Gamma(1+2\varepsilon)\Gamma^3(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-3\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Для нахождения вклада в поляризационный оператор, задаваемого второй диаграммой на рис. 16, изобразим эту диаграмму более детально (см. рис. 18).

Задача вычисления данного вклада представляется более трудной, поскольку рассматриваемая диаграмма содержит истинно двухпетлевую «скелетную» диаграмму вида:



Запишем выражение для свертки этого вклада, воспользовавшись стандартными правилами Фейнмана:

$$g_{\mu\nu} \mathcal{P}_2^{(2)\mu\nu}(p) = -e_0^4 \int \frac{d^N k_1}{(2\pi)^N} \frac{d^N k_2}{(2\pi)^N} \frac{\mathcal{N}}{D_1 D_2 D_3 D_4 D_5}, \quad (1.70)$$

где  $(k_1 + p)^2 = -D_1$ ,  $(k_2 + p)^2 = -D_2$ ,  $k_1^2 = -D_3$ ,  $k_2^2 = -D_4$ ,  $(k_1 - k_2)^2 = -D_5$  и числитель подынтегрального выражения представляет собой следующий шпур от произведения матриц Дирака:

$$\mathcal{N} = \text{Sp}\{\gamma_\mu (\hat{k}_2 + \hat{p}) \gamma_\nu (\hat{k}_1 + \hat{p}) \gamma^\mu \hat{k}_1 \gamma^\nu \hat{k}_2\}. \quad (1.71)$$

Скалярные произведения можно исключить, используя соотношения:

$$\begin{aligned} 2(pk_1) &= p^2 + D_3 - D_1, & 2(pk_2) &= p^2 + D_4 - D_2, \\ 2(k_1 k_2) &= D_5 - D_3 - D_4. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Все произведения  $D_i D_j$  ( $i \neq j$ ) в числителе, за исключением  $D_1 D_4$  и  $D_2 D_3$ , могут быть отброшены, поскольку соответствующие им интегралы обращаются в нуль. После вычисления шпура с учетом этих упрощений получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & -2(N-2) [(N-4)(D_1 D_4 + D_2 D_3) + \\ & + 2p^2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) + 2D_5^2 + (N-8)p^2 D_5 + 2(p^2)^2], \end{aligned}$$

а второй вклад в след поляризационного оператора преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \mathcal{P}_2^{(2)\mu\nu}(p) = & -\frac{e_0^4 (-p^2)^{1-2\varepsilon}}{(4\pi)^{4-2\varepsilon}} 2(N-2) [2(N-4) G(0, 1, 1, 0, 1) - \\ & - 8G(0, 1, 1, 1, 1) + 2G(1, 1, 1, 1, -1) - \\ & - (N-8)G(1, 1, 1, 1, 0) + 2G(1, 1, 1, 1, 1)], \end{aligned} \quad (1.73)$$

где константы  $G(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$  определяются следующим двухпетлевым интегралом:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^N k_1}{(2\pi)^N} \frac{d^N k_2}{(2\pi)^N} \frac{1}{D_1^{n_1} D_2^{n_2} D_3^{n_3} D_4^{n_4} D_5^{n_5}} = \\ = -\frac{1}{(4\pi)^N} (-p^2)^{N/2-n_1-n_2-n_3-n_4-n_5} G(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5). \end{aligned} \quad (1.74)$$

В выражении (1.73) две константы тривиальны:

$$G(1, 1, 1, 1, 0) = G_1^2, \quad G(0, 1, 1, 0, 1) = G_2,$$

а третья вычисляется достаточно просто:

$$G(0, 1, 1, 1, 1) = G(1, 1) G(1, 3 - N/2) = \frac{3N - 8}{N - 4} G_2,$$

где было использовано соотношение (1.67).

Единственный действительно двухпетлевой интеграл  $G(1, 1, 1, 1, 1)$  был вычислен ранее. Он определяется выражением:

$$\begin{aligned} G(1, 1, 1, 1, 1) = \\ = \frac{2}{N - 4} \left[ \frac{(3N - 8)(3N - 10)}{N - 4} G_2 - (N - 3) G_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Не представляет особого труда разложить эту константу в ряд по  $\varepsilon$ , воспользовавшись соотношением:

$$\frac{\Gamma(1 + 2\varepsilon) \Gamma^2(1 - 2\varepsilon)}{\Gamma^2(1 + \varepsilon) \Gamma(1 - \varepsilon) \Gamma(1 - 3\varepsilon)} = 1 - 6\zeta_3 \varepsilon^3 + \dots, \quad (1.76)$$

где значения  $\zeta$ -функции Римана для целочисленного аргумента  $k$  обозначены как  $\zeta_k \equiv \zeta(k)$ . В итоге для искомой константы в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  приходим к следующему простому результату:

$$G(1, 1, 1, 1, 1) = 6\zeta_3 + \dots. \quad (1.77)$$

Наконец, остался интеграл  $G(1, 1, 1, 1, -1)$ , который можно представить в виде произведения двух однопетлевых интегралов, если в числителе дополнительная зависимость от импульсов интегрирования отсутствует. Вычислим этот интеграл и докажем, что это утверждение действительно выполняется.

$$\begin{aligned} G(1, 1, 1, 1, -1) &= -\frac{1}{\pi^N} \int \frac{d^N k_1}{D_1 D_3} \frac{d^N k_2}{D_2 D_4} = [-(k_1 - k_2)^2] \\ &= -\frac{2}{\pi^N} \int \frac{k_1^\mu d^N k_1}{D_1 D_3} \int \frac{k_{2\mu} d^N k_2}{D_2 D_4}. \end{aligned}$$



Оба векторных интеграла направлены вдоль 4-вектора  $p^\mu$ , поэтому после их проецирования на  $p^\mu$  приходим к результату:

$$\begin{aligned} G(1, 1, 1, 1, -1) &= \\ &= -\frac{2}{\pi^N p^2} \int \frac{(k_1 p) d^N k_1}{D_1 D_3} \int \frac{(k_2 p) d^N k_2}{D_2 D_4} = -\frac{1}{2} G_1^2. \end{aligned} \quad (1.78)$$

С учетом вышеизложенного получаем следующее выражение для второго вклада в след поляризационного оператора фотона:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \mathcal{P}_2^{(2)\mu\nu} &= \frac{e_0^4 (-p^2)^{N-3}}{(4\pi)^N} \frac{2(N-2)}{(N-4)^2} \times \\ &\times \left[ (N-4)(N^2 - 7N + 16) G_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2(N^3 - 6N^2 + 20N - 32) G_2 \right]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Рассмотренные вклады в  $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{(2)}(p)$  по отдельности содержат продольную составляющую, которая сокращается после их суммирования, т. е. поляризационный оператор в двухпетлевом приближении, как и следует из общих соображений, ортогонален 4-импульсу фотона  $p^\mu$ . Окончательно, из суммы двух вкладов в след поляризационного оператора:

$$\mathcal{P}^{(2)}(p^2) = -\frac{g_{\mu\nu}}{(N-1)(-p^2)} \left[ 2\mathcal{P}_1^{(2)\mu\nu} + \mathcal{P}_2^{(2)\mu\nu} \right],$$

можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(2)}(p^2) &= \frac{e_0^4 (-p^2)^{-2\varepsilon}}{(4\pi)^{4-2\varepsilon}} \frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon^2(3-2\varepsilon)} \times \\ &\times \left[ \varepsilon(2-\varepsilon+2\varepsilon^2) G_1^2 + 4(1-2\varepsilon)(2-2\varepsilon+\varepsilon^2) G_2 \right]. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Напомним, что поляризационный оператор  $\mathcal{P}(p^2)$  в однопетлевом приближении имеет вид:

$$\mathcal{P}^{(1)}(p^2) = -\frac{e_0^2 (-p^2)^{-\varepsilon}}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} \frac{4(1-\varepsilon)}{3-2\varepsilon} G_1. \quad (1.81)$$

### Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить поправку к массе электрона в однопетлевом приближении в  $\overline{MS}$  - схеме и аномальную размерность массы.

2. Вычислить поляризационный оператор фотона в однопетлевом приближении в  $\overline{MS}$  - схеме.
3. Найти зависимость постоянной тонкой структуры от масштаба энергии  $\mu$ .

## 2. Радиационные поправки

**Задание 2.1.** Доказать, что  $\Sigma(p)$  и  $\Lambda^\alpha(p, p, 0)$ , вычисленные в однопетлевом приближении, удовлетворяют тождеству Уорда:

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\alpha} = \Lambda^\alpha(p, p, 0). \quad (2.1)$$

*Решение*

Выражение для  $\Sigma(p)$  определено формулой (1.18) в задании 1.3:

$$\Sigma(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} \frac{\gamma_\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\mu}{(p - k)^2 - m^2}. \quad (2.2)$$

Заметим, что зависимость от импульса  $p_\alpha$  имеется только в электронном пропагаторе  $S(p - k)$ . Найдем производную от  $S(p - k)$  по  $p_\alpha$ . Для этого продифференцируем выражение  $S(p - k)S^{-1}(p - k) = 1$  по  $p_\alpha$ :

$$\frac{\partial S(p - k)}{\partial p_\alpha} S^{-1}(p - k) + S(p - k) \frac{\partial S^{-1}(p - k)}{\partial p_\alpha} = 0$$

или после умножения справа на  $S(p - k)$ :

$$\frac{\partial S(p - k)}{\partial p_\alpha} = -S(p - k) \frac{\partial S^{-1}(p - k)}{\partial p_\alpha} S(p - k).$$

Зависимость  $S^{-1}(p - k)$  от импульса тривиальна:

$$S^{-1}(p - k) = -i[(p - k)_\alpha \gamma^\alpha - m], \quad \frac{\partial S^{-1}(p - k)}{\partial p_\alpha} = -i\gamma^\alpha.$$

Таким образом, производная от электронного пропагатора имеет вид:

$$\frac{\partial S(p - k)}{\partial p_\alpha} = i S(p - k) \gamma^\alpha S(p - k). \quad (2.3)$$

Подставляя в (2.3) явный вид пропагатора электрона:

$$S(p) = \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2},$$

получаем следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha} \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2} = - \frac{(\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\alpha (\hat{p} - \hat{k} + m)}{[(p - k)^2 - m^2]^2}. \quad (2.4)$$

Используя результат (2.4), можно получить выражение для производной от ЭСЭД, вычисленной во втором порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\alpha} &= \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2} \frac{\gamma_\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\alpha (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma^\mu}{[(p - k)^2 - m^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сравнивая это выражение с вершинной функцией в однопетлевом приближении (1.30), в которой надо сделать подстановку  $p_1 = p_2 = p$ , замечаем, что они тождественны. Это и есть *тождество Уорда*. С его помощью можно контролировать вычисления  $\Sigma(p)$  и  $\Lambda^\alpha(p, p, 0)$ . Например, сравнивая результаты вычислений в задании 1.3 производной  $\partial \Sigma(p) / \partial \hat{p}|_{\hat{p}=m}$  (1.25) и в задании 1.4 вершинной функции  $\Lambda^\alpha(p, p, 0)$  (1.38) и учитывая, что

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\alpha} = \gamma^\alpha \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial \hat{p}},$$

находим, что выражения (1.38) и (1.25) пропорциональны друг другу, как и следует из тождества Уорда.

**Задание 2.2.** Написать выражение для формфактора электрона в однопетлевом приближении.

*Решение*

Электромагнитные формфакторы обусловлены эффективной нелокальностью электрона в процессе его взаимодействия с электромагнитным полем. Графически это можно изобразить набором диаграмм Фейнмана (см. рис. 19).

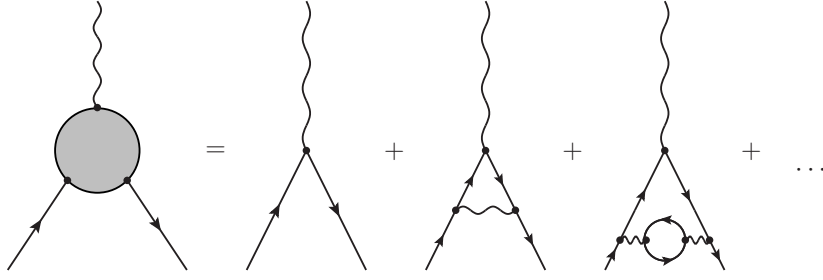


Рис. 19. Диаграммы Фейнмана, описывающие взаимодействие электрона с электромагнитным полем

Амплитуда такого процесса может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= [\bar{u}(p_2) \gamma^\alpha u(p_1)] A_\alpha - ie [\bar{u}(p_2) \Lambda_R^\alpha u(p_1)] A_\alpha = \\ &= e [\bar{u}(p_2) \Gamma^\alpha u(p_1)] A_\alpha,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где введен оператор  $\Gamma^\alpha$ , общий вид которого с учетом физических требований следующий:

$$\Gamma^\alpha = F(q^2) \gamma^\alpha - g(q^2) \frac{\sigma^{\alpha\beta} q_\beta}{2m}. \quad (2.7)$$

Скалярные функции  $F(q^2)$  и  $g(q^2)$  называются *электромагнитными формфакторами* электрона. В однопетлевом приближении они определяются вершинной функцией  $\Lambda_R^\alpha(p_1, p_2, q)$ , вычисленной ранее (см. формулу (1.36) в задании 1.4).

Из выражения (2.6) видно, что

$$\Gamma^\alpha = \gamma^\alpha - i\Lambda_R^\alpha,$$

и с учетом (1.36) можно легко выписать электромагнитные формфакторы электрона:

$$\begin{aligned}F(q^2) &= 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \left( 2 - \frac{q^2}{m^2} \right) \int_0^1 \frac{dy}{f(y)} \left[ 2 + 2 \ln \frac{\lambda}{m} - \ln f(y) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dy \ln f(y) - 4 - 4 \ln \frac{\lambda}{m} \right\},\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$g(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 \frac{dy}{f(y)}, \quad (2.9)$$

где введено обозначение:

$$f(y) = 1 - \frac{q^2}{m^2} y (1 - y). \quad (2.10)$$

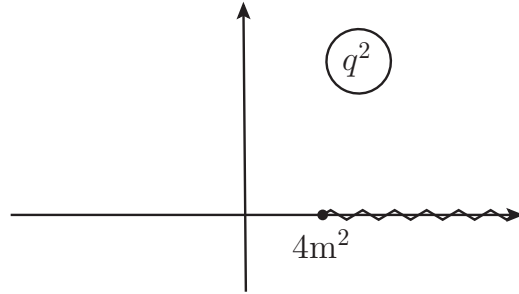
Заметим, что функция  $f(y)$  — знакопеременная при  $q^2 \geq 4m^2$ . В этом случае надо доопределить формфакторы  $F(q^2)$  и  $g(q^2)$ . Для этого достаточно сделать замену  $m^2 \rightarrow m^2 - i0$ , вспомнив определение пропагатора электрона:

$$S(p) = \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0}.$$

При такой замене

$$\begin{aligned} f(y) &= 1 - \frac{q^2}{m^2} y (1 - y) \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - \frac{q^2}{m^2 - i0} y (1 - y) = 1 - \frac{q^2 + i0}{m^2} y (1 - y). \end{aligned}$$

Формфакторы  $F(q^2)$  и  $g(q^2)$  приобретают смысл аналитических функций в комплексной плоскости  $q^2$  с разрезом вдоль вещественной оси при  $q^2 \geq 4m^2$ .



При этом физическими являются верхний берег разреза и вся отрицательная часть вещественной оси. Отрезок на вещественной оси  $0 \leq q^2 \leq 4m^2$  — нефизическая область значений переменной  $q^2$ .

Наиболее просто исследуется магнитный формфактор  $g(q^2)$ . В области отрицательных значений  $q^2$  интеграл в (2.9) берется в терминах вещественных элементарных функций:

$$g(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{z}{\text{sh}(2z)}, \quad (2.11)$$

$$z = \text{Arsh} \sqrt{\frac{-q^2}{4m^2}} = \ln \left[ \sqrt{\frac{-q^2}{4m^2}} + \sqrt{1 - \frac{q^2}{4m^2}} \right].$$

Это выражение легко аналитически продолжить в область значений переменной  $0 \leq q^2 \leq 4m^2$ . Для этого достаточно в (2.11) ввести новую переменную:

$$z = i\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

после чего выражение для магнитного формфактора приобретает вид:

$$g(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\theta}{\sin(2\theta)}, \quad \theta = \arcsin \sqrt{\frac{q^2}{4m^2}}. \quad (2.12)$$

Аналогично аналитически продолжим функцию  $g(q^2)$  в область  $q^2 > 4m^2$ , помня при этом, что физическая область значений  $q^2$  – верхний берег разреза в комплексной плоскости  $q^2$ . Для этого в (2.11) достаточно сделать замену:

$$z = v - i\frac{\pi}{2}, \quad \text{sh}(2z) = \text{sh}(2v - i\pi) = -\text{sh}(2v).$$

Такая замена приводит к следующему выражению для  $g(q^2)$  при  $q^2 > 4m^2$ :

$$g(q^2) = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{v - i\pi/2}{\text{sh}(2v)}, \quad (2.13)$$

$$v = \text{Arch} \sqrt{\frac{q^2}{4m^2}} = \ln \left[ \sqrt{\frac{q^2}{4m^2}} + \sqrt{\frac{q^2}{4m^2} - 1} \right].$$

Асимптотически при  $|q^2| \gg 4m^2$  формулы (2.11) и (2.13) можно объединить в одну и записать в виде:

$$g(q^2) \simeq -\frac{\alpha}{\pi} \frac{m^2}{q^2} \left[ \ln \left| \frac{q^2}{m^2} \right| - i\pi \Theta(q^2) \right], \quad (2.14)$$

где  $\Theta(q^2)$  – функция Хэвисайда.

Формфактор  $F(q^2)$  в элементарных функциях полностью выразить не удастся. Приведем здесь только асимптотическое выражение при  $|q^2| \gg m^2$ :

$$F(q^2) \simeq 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \left| \frac{q^2}{m^2} \right| \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \left| \frac{q^2}{m^2} \right| \right]. \quad (2.15)$$

Заметим, что формула (2.15) справедлива в дважды логарифмическом приближении, когда  $\ln |q^2/m^2| \gg 1$ .

**Задание 2.3.** Вычислить аномальный магнитный момент электрона, используя электромагнитные формфакторы, рассмотренные в задании 2.2.

*Решение*

Для нахождения аномального магнитного момента электрона рассмотрим подробнее амплитуду рассеяния электрона во внешнем постоянном магнитном поле. С учетом нелокальности взаимодействия (формфакторов) амплитуда имеет вид:

$$\mathcal{M} = e \bar{u}(p_2) \left[ F(q^2) \gamma_\alpha - g(q^2) \frac{\sigma_{\alpha\beta} q^\beta}{2m} \right] u(p_1) A^\alpha(q), \quad (2.16)$$

где  $A_\alpha(q)$  – 4-потенциал внешнего электромагнитного поля в импульсном представлении. Для чисто магнитного поля  $A^\alpha = (0, \vec{A})$ . Заметим также, что в обкладках между биспинорами имеет место следующее матричное соотношение:

$$\gamma_\alpha = \frac{p_\alpha}{2m} - \frac{\sigma_{\alpha\beta} q^\beta}{2m}, \quad p = p_1 + p_2, \quad q = p_2 - p_1. \quad (2.17)$$

С учетом (2.17) перепишем амплитуду рассеяния (2.16) в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{e}{2m} [\bar{u}(p_2) u(p_1)] (Ap) F(q^2) - \\ &- \frac{e}{2m} [\bar{u}(p_2) (A\sigma q) u(p_1)] [F(q^2) + g(q^2)], \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $(A\sigma q) = A_\alpha \sigma^{\alpha\beta} q_\beta$ .

Рассмотрим амплитуду (2.18) в системе отсчета, где для 4-векторов справедливо следующее представление:

$$p_1^\mu = (E, -\vec{q}/2), \quad p_2^\mu = (E, \vec{q}/2), \quad p^\mu = (2E, 0), \quad q^\mu = (0, \vec{q}).$$

Далее будем рассматривать нерелятивистский предел, когда  $|\vec{q}| \ll m$  и  $E \simeq m$ . В этом случае биспиноры  $u(p_1)$  и  $u(p_2)$  существенно упрощаются:

$$u(p_{1,2}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \varphi_{1,2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где  $\varphi_{1,2}$  – спиноры, описывающие нерелятивистские электроны. Заметим также, что в этом пределе в случае чисто магнитного поля амплитуду (2.18) можно представить в виде:

$$\mathcal{M} = -ie \left( \varphi_2^\dagger \vec{\sigma} \varphi_1 \right) \left[ \vec{q} \times \vec{A} \right] \{ F(-\vec{q}^2) + g(-\vec{q}^2) \}.$$

Учитывая, что вектор индукции магнитного поля  $\vec{H}(\vec{q}) = i [\vec{q} \times \vec{A}]$  и значение формфактора  $F(0) = 1$  (это следует из (2.8) при  $q^2 = -\vec{q}^2 \rightarrow 0$ ), окончательно получаем:

$$\mathcal{M} = -e \left( \varphi_2^\dagger \vec{\sigma} \varphi_1 \right) \vec{H}(\vec{q}) [1 + g(0)]. \quad (2.20)$$

Сравним эту амплитуду с амплитудой рассеяния в электростатическом поле. В этом случае из (2.18) следует:

$$\mathcal{M} = 2me \left( \varphi_2^\dagger \varphi_1 \right) \Phi, \quad (2.21)$$

где учтено, что электростатическое поле описывается четырехмерным электромагнитным потенциалом  $A_\mu = (\Phi, \vec{0})$ . Так как амплитуда рассеяния пропорциональна энергии заряда в поле, то, сравнивая (2.20) и (2.21), замечаем, что электрону в магнитном поле можно приписать потенциальную энергию:

$$U_{\text{mag}} = - \left( \vec{\mu}_e \vec{H} \right) = \frac{e}{2m} \left( \varphi_2^\dagger \vec{\sigma} \varphi_1 \right) \vec{H} [1 + g(0)].$$

Это означает, что он обладает магнитным моментом:

$$\mu_e = -\mu_B [1 + g(0)],$$

где  $\mu_B = e/(2m)$  — магнетон Бора ( $\mu_B = e\hbar/(2mc)$  в гауссовой системе единиц). Здесь также учтено, что заряд электрона, равный  $-e$ , отрицателен.

Значение магнитного формфактора  $g(q^2)$  при  $q^2 = 0$  находим из формулы (2.11) в пределе  $z \rightarrow 0$ :

$$g(0) \equiv a_e = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

В итоге получим значение магнитного момента электрона в однопетлевом приближении:

$$\mu_e = -\mu_B \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right). \quad (2.22)$$

Из формулы (2.22) видно, что за счет квантовых эффектов электрон обладает дополнительным, по сравнению с дираковским  $\mu_B$ , аномальным магнитным моментом:

$$\Delta\mu_e^{(1)} = -\mu_B a_e = -\mu_B \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (2.23)$$



Аномальный магнитный момент  $a_e$ , обусловленный эффектами квантовой электродинамики, был вычислен Ю. Швингером в 1948 г. сразу после экспериментального обнаружения П. Кашем и Г. Фоли в 1947 г. отклонения магнитного момента электрона от удвоенного значения магнетона Бора, предсказываемого теорией Дирака. В настоящее время значение аномального магнитного момента электрона в рамках квантовой электродинамики вычислено в пятом порядке теории возмущений по постоянной тонкой структуры (в приближении пяти петель):

$$a_e(QED) = \quad (2.24)$$

$$= a_e^{(2)} \frac{\alpha}{\pi} + a_e^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + a_e^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + a_e^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + a_e^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5,$$

причем  $a_e^{(2)}$ ,  $a_e^{(4)}$  и  $a_e^{(6)}$  вычислены аналитически, для  $a_e^{(8)}$  и  $a_e^{(10)}$  имеются численные оценки. Следует отметить, что это выражение необходимо дополнить вкладами петлевых диаграмм, обусловленных сильными и слабыми взаимодействиями, однако для электрона эти вклады не существенны и аномальный магнитный момент практически полностью определяется квантовой электродинамикой. Основной вклад в аномальный магнитный момент за счет слабых взаимодействий будет рассмотрен далее в задании 3.3. Приведем оценку аномального магнитного момента электрона:

$$a_e^{\text{th}} = (1\,159\,652\,181.78 \pm 0.77) \times 10^{-12}, \quad (2.25)$$

полученную группой Т. Киношиты в 2012 г., причем указанная неопределенность происходит от ошибки измерения постоянной тонкой структуры  $\alpha^{-1} = 137.035\,999\,049 \pm 0.000\,000\,090$ . Сравнение с экспериментальным значением удобно представить в виде разности:

$$a_e^{\text{exp}} - a_e^{\text{th}} = (-1.02 \pm 0.82) \times 10^{-12}, \quad (2.26)$$

что наглядно демонстрирует хорошее согласие громоздких теоретических расчетов, проводимых на протяжении нескольких десятилетий, с экспериментом.

**Задание 2.4.** Рассмотреть квантовые радиационные поправки, возникающие при взаимодействии двух точечных классических зарядов, т. е. поправки к закону Кулона.

*Решение*

Закон Кулона описывает взаимодействие двух точечных классических зарядов, причем потенциальная энергия их взаимодействия равна:

$$U(R) = \frac{Qq}{4\pi R}, \quad (2.27)$$

где  $Q$  и  $q$  – величины зарядов, а  $R$  – расстояние между ними. Напомним, что используется система Хэвисайда, поэтому в формуле (2.27) и появился множитель  $1/(4\pi)$ .

Покажем, что закон Кулона можно получить как результат взаимодействия зарядов  $Q$  и  $q$  друг с другом через квантованное электромагнитное поле.

Лагранжиан взаимодействия классических зарядов с электромагнитным полем имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -j_{\mu}^{(Q)}(x) A^{\mu}(x) - j_{\mu}^{(q)}(x) A^{\mu}(x), \quad (2.28)$$

где  $A_{\mu}(x)$  – оператор электромагнитного поля, а  $j_{\mu}^{(Q)}(x)$  и  $j_{\mu}^{(q)}(x)$  – четырехмерные токи неподвижных зарядов  $Q$  и  $q$ :

$$j_{\mu}^{(Q)} = (Q\delta(\vec{r}), 0), \quad j_{\mu}^{(q)} = (q\delta(\vec{r} - \vec{R}), 0). \quad (2.29)$$

Начало системы координат выбрано в точке трехмерного пространства, где находится заряд  $Q$ .

Рассмотрим  $S$ -матричный элемент между состояниями, где отсутствуют какие-либо кванты полей, а есть только два классических заряда  $Q$  и  $q$  (с точки зрения квантованных полей оба эти состояния вакуумные). Такому матричному элементу соответствует диаграмма Фейнмана на рис. 20, и его величина отлична от нуля, только начиная со второго порядка теории возмущений:

$$S_{if}^{(2)} = i^2 \int j_{\mu}^{(Q)}(x_1) j_{\nu}^{(q)}(x) D^{\mu\nu}(x - x_1) d^4x d^4x_1,$$

где  $D_{\mu\nu}(x - x_1)$  – пропагатор электромагнитного поля в координатном представлении. Это выражение для  $S$ -матричного эле-

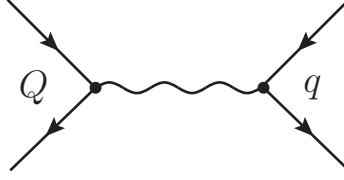


Рис. 20. Диаграмма Фейнмана, описывающая взаимодействие двух точечных зарядов  $Q$  и  $q$

мента также можно записать в форме:

$$S_{if}^{(2)} = -i \int j_\nu^{(q)}(x) A^{(Q)\nu}(x) d^4x \equiv S_{if}^{\text{eff}(1)}, \quad (2.30)$$

где введено обозначение:

$$A^{(Q)\nu}(x) = -i \int j_\mu^{(Q)}(x_1) D^{\mu\nu}(x - x_1) d^4x_1. \quad (2.31)$$

$S$ -матричный элемент (2.30) можно понимать как эффективный  $S$ -матричный элемент первого порядка с эффективным лагранжианом взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{eff}}(x) = -j_\nu^{(q)}(x) A^{(Q)\nu}(x), \quad (2.32)$$

которому соответствует гамильтониан (плотность функции Гамильтона):

$$\mathcal{H}(x) = -\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{eff}}(x) = j_\nu^{(q)}(x) A^{(Q)\nu}(x).$$

Таким образом, для двух зарядов, находящихся на расстоянии  $R$  друг от друга, энергию взаимодействия, возникающую за счет обмена квантовым электромагнитным полем, можно записать в виде:

$$U(R) = \int \mathcal{H}(x) d^3r = -i \int d^3r d^4x_1 j_\nu^{(q)}(x) j_\mu^{(Q)}(x_1) D_{\mu\nu}(x - x_1).$$

Воспользовавшись представлением пропагатора фотона в форме четырехкратного интеграла Фурье и явным видом токов (2.29), получим:

$$\begin{aligned} U(R) = & -\frac{iQq}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^3r d^3r_1 dt_1 \delta(\vec{r}_1) \delta(\vec{r} - \vec{R}) \times \\ & \times e^{-ik_0(t-t_1)} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)} D_{00}(k). \end{aligned}$$

По переменным  $\vec{r}_1$ ,  $t_1$  и  $\vec{r}$  можно легко проинтегрировать, не затрагивая явного вида  $D_{00}(k)$ :

$$U(R) = -\frac{iQq}{(2\pi)^3} \int d^3k dk_0 \delta(k_0) D_{00}(k) e^{i(\vec{k}\vec{R})}. \quad (2.33)$$

Пропагатор фотона в импульсном представлении  $D_{\mu\nu}(k)$  имеет вид:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2} + k_\mu k_\nu d_L(k^2),$$

где  $d_L(k^2)$  — произвольная функция. Заметим далее, что  $g_{00} = 1$  и

$$\begin{aligned} D_{00}(k) \delta(k_0) &= \\ &= \left[ \frac{-ig_{00}}{k_0^2 - \vec{k}^2} + k_0^2 d_L(k_0^2 - \vec{k}^2) \right] \delta(k_0) = \frac{i}{\vec{k}^2} \delta(k_0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Подставив (2.34) в (2.33) и проинтегрировав по переменной  $k_0$ , получим:

$$U(R) = \frac{Qq}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\vec{k}^2} e^{i(\vec{k}\vec{R})}. \quad (2.35)$$

Дальнейшее интегрирование удобно проводить в сферической системе координат, если ось  $Oz$  в пространстве вектора  $\vec{k}$  направить по  $\vec{R}$ . В этом случае выражение (2.35) не содержит явной зависимости от угла  $\varphi$  и интегрирование по углу  $\varphi$  даст множитель  $2\pi$ , и выражение для энергии (2.35) можно привести к однократному интегралу:

$$U(R) = \frac{Qq}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 e^{ikRu} du = \frac{Qq}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \sin z,$$

где  $u = \cos \theta$  и  $z = kR$ . Подставив табличное значение интеграла по  $z$ :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{z} \sin z = \frac{\pi}{2},$$

воспроизведем выражение для закона Кулона (2.27) в системе Хэвисайда. Заметим при этом, что мы использовали только древесную диаграмму.

Радикационные поправки сводятся к замене древесного пропагатора  $D_{\mu\nu}(x)$  на точный  $G_{\mu\nu}^\gamma(x)$ . В этом случае вместо формулы (2.34) будем иметь:

$$G_{00}^\gamma(k) \delta(k_0) = \frac{-i\delta(k_0)}{k^2 + i\mathcal{P}_R(k^2)} = \frac{i\delta(k_0)}{\vec{k}^2 - i\mathcal{P}_R(-\vec{k}^2)}. \quad (2.36)$$

Подставив функцию (2.36) в (2.33), получим следующее выражение для энергии:

$$U(R) = \frac{Qq}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k e^{i(\vec{k}\vec{R})}}{\vec{k}^2 - i\mathcal{P}_R(-\vec{k}^2)}. \quad (2.37)$$

В выражении (2.37) интегралы по углам  $\varphi$  и  $\theta$  сферической системы легко вычисляются и выражение для энергии может быть преобразовано к интервалу по переменной  $z = kR$ :

$$U(R) = \frac{Qq}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \frac{\sin z}{1 - i(R^2/z^2) \mathcal{P}_R(-z^2/R^2)}. \quad (2.38)$$

Подставив в (2.38) явное выражение для перенормированной ФСЭД (1.58), вычисленное ранее в задании 1.6, получим:

$$U(R) = \frac{Qq}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \sin z \times \left[ 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( 1 + \frac{z^2 x(1-x)}{m^2 R^2} \right) \right]^{-1}. \quad (2.39)$$

Такой интеграл в общем случае вычислить невозможно. Однако его асимптотическое поведение в зависимости от  $R$  можно исследовать относительно легко. Характерным размером в (2.39) является комптоновская длина волны электрона  $\lambda_e = 1/m = 3.66 \times 10^{-11}$  см.

При сравнении  $R$  с  $\lambda_e$  возможны два случая.

*1-й случай:* макроскопические расстояния  $R \gg \lambda_e$  или  $mR \gg 1$ . В этом случае в знаменателе (2.39)  $\ln [1 + z^2 x(1-x)/(m^2 R^2)] \rightarrow 0$  и восстанавливается закон Кулона (2.27).

2-й случай: микроскопические расстояния  $R \ll \lambda_e$  или  $mR \ll 1$ . В этом случае интеграл по  $x$  в выражении (2.39) легко вычисляется:

$$\int_0^1 dx x (1-x) \ln \left[ 1 + \frac{z^2 x (1-x)}{m^2 R^2} \right] \simeq \frac{1}{3} \left( \ln \frac{z}{mR} - \frac{5}{6} \right).$$

Далее можно воспользоваться теоремой о среднем:

$$U(R) = \frac{Qq}{4\pi R} \left[ 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \left( \ln \frac{\bar{z}}{mR} - \frac{5}{6} \right) \right]^{-1}, \quad (2.40)$$

где  $\bar{z}$  – среднее значение переменной  $z$  в интеграле типа (2.39). Важно, что это некоторое фиксированное число. Окончательно энергию взаимодействия двух классических точечных зарядов  $Q$  и  $q$  можно записать в виде:

$$U(R) = \frac{Qq}{4\pi R} \left[ 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{a}{mR} \right]^{-1}, \quad (2.41)$$

где  $a = \bar{z} e^{-5/6}$ .

Таким образом, из формулы (2.41) видно, что энергия взаимодействия растет с уменьшением расстояния между зарядами быстрее, чем по закону Кулона. Полученный эффект – проявление поляризации электрон-позитронного вакуума, приводящей к экранировке заряда. В результате квадрат заряда зависит от расстояния  $R$  по формуле:

$$Q^2(R) = Q^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{a}{mR} \right]^{-1}.$$

Следует отметить, что аналогичное явление экранировки имеет место и для заряда электрона. Можно ввести «бегущий» заряд электрона, а следовательно, и «бегущую» постоянную тонкой структуры  $\alpha(R)$ :

$$\alpha(R) = \alpha \left[ 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln \frac{a}{mR} \right]^{-1},$$

откуда можно найти связь между  $\alpha(r_1)$  и  $\alpha(r_2)$ :

$$\alpha(r_2) = \alpha(r_1) \left[ 1 - \frac{\alpha(r_1)}{3\pi} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} \right]^{-1}. \quad (2.42)$$

Если учесть, кроме поляризации электрон-позитронного вакуума, поляризацию вакуума, обусловленную другими заряженными полями, то в (2.42) перед логарифмом появится дополнительный множитель, равный  $N = \sum_i Q_i^2$ , где  $Q_i$  — электрические заряды частиц в долях элементарного и суммирование ведется по частицам, для которых комптоновские длины волн удовлетворяют условию  $\lambda_i = 1/m_i \gg r_{1,2}$ .

### Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить сечение рассеяние фотона на фотоне.
2. Вычислить радиационное смещение уровней атома водорода (лембовский сдвиг).
3. Вычислить радиационное смещение уровней мезоатома, состоящего из протона и мюона.

## 3. Электрослабые процессы

**Задание 3.1.** Рассмотрев аналитические свойства ФСЭД и обобщив их на случай произвольной частицы, рассмотреть резонансное рассеяние.

### Решение

Выпишем ФСЭД, вычисленную в задании 1.6:

$$\mathcal{P}_R(k^2) = \frac{2i\alpha}{\pi} k^2 \int_0^1 x(1-x) \ln \left[ 1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right] dx.$$

Из этого выражения видно, что  $\mathcal{P}_R(k^2)$  — аналитическая функция в комплексной плоскости переменной  $k^2$  с разрезом вдоль вещественной оси  $k^2 \geq 4m^2$ . Введем массовый оператор:

$$\mu(k^2) \equiv -i\mathcal{P}_R(k^2), \quad (3.1)$$

для которого можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mu(k^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} k^2 \int_0^1 x(1-x) \ln \left| 1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right| dx - \\ &- i\Theta(k^2 - 4m^2) \frac{\alpha}{3} (k^2 + 2m^2) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\Theta(k^2 - 4m^2)$  – функция Хэвисайда, учитывающая аналитическое продолжение логарифма на физический лист. Точка  $k^2 = 4m^2$  выделена физически тем, что виртуальный фотон при  $k^2 \geq 4m^2$  может распадаться на электрон-позитронную пару.

Покажем, что мнимая часть массового оператора пропорциональна ширине распада  $\gamma^* \rightarrow e^- e^+$  такого фотона, обладающего эффективной массой  $m_\gamma = \sqrt{k^2}$ . Амплитуда распада фотона следующая:

$$\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow e^- e^+} = e [\bar{u}(p_-) \gamma^\alpha u(-p_+)] \varepsilon_\alpha^{(\lambda)}(k),$$

где  $p_-^\mu$  и  $p_+^\mu$  – четырехмерные импульсы электрона и позитрона соответственно,  $\varepsilon_\alpha^{(\lambda)}(k)$  – 4-вектор поляризации виртуального массивного фотона, характеризуемый индексом  $\lambda = 0, \pm 1$ , нумерующим три возможные поляризации.

Квадрат матричного элемента вычисляется с использованием стандартной техники, причем матрица плотности фотона, усредненная по трем поляризациям, имеет вид:

$$\frac{1}{3} \rho_{\mu\nu}^{(\gamma)}(k) = \frac{1}{3} \sum_{\lambda=0,\pm 1} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k) = -\frac{1}{3} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right).$$

С учетом этого получим:

$$\frac{1}{3} \sum_{\lambda=0,\pm 1} |\mathcal{M}_{\gamma^* \rightarrow e^- e^+}|^2 = \frac{16\pi\alpha}{3} (k^2 + 2m^2).$$

Фазовый объем двух электронов мы уже фактически вычислили во введении (см. (0.28), где  $p_i^2 = k^2$ ).

Полная вероятность распада в единицу времени, которая называется шириной распада, имеет следующий вид:

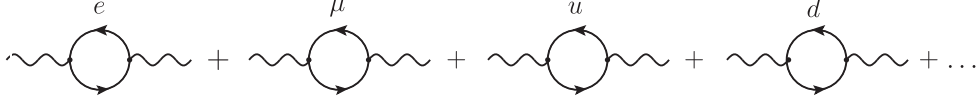
$$\Gamma_{\gamma^* \rightarrow e^- e^+}(k^2) = \frac{\alpha}{3\sqrt{k^2}} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} (k^2 + 2m^2) \Theta(k^2 - 4m^2), \quad (3.3)$$

где  $\Theta(k^2 - 4m^2)$  – функция Хэвисайда, возникшая в результате интегрирования по фазовому пространству электрон-позитронной пары с учетом законов сохранения энергии и импульса. Сравнивая выражения (3.2) и (3.3), замечаем:

$$\text{Im } \mu(k^2) = -\sqrt{k^2} \Gamma_{\gamma^* \rightarrow e^- e^+}(k^2). \quad (3.4)$$



Здесь учтен только вклад электронов и позитронов в полную ширину распада фотона  $\Gamma_{\text{tot}}(k^2)$ . Этому соответствует тот факт, что в ФСЭД учтена только диаграмма с виртуальными электронами. На самом деле надо учесть и электрически заряженные другие поля:



и, соответственно, в мнимой части массового оператора фотона появятся слагаемые, описывающие также распад на мюонную пару  $\gamma^* \rightarrow \mu^- \mu^+$  при  $k^2 \geq 4m_\mu^2$ , на пару  $u$ -кварков  $\gamma^* \rightarrow \bar{u}u$  при  $k^2 \geq 4m_u^2$ , на пару  $d$ -кварков  $\gamma^* \rightarrow \bar{d}d$  при  $k^2 \geq 4m_d^2$  и т. д. В этом случае говорят, что с ростом  $k^2$  открываются новые каналы распада виртуального фотона. С учетом этого точный фотонный пропагатор можно записать в виде:

$$G_R^\gamma(k^2) = \frac{-i}{k^2 - \text{Re } \mu(k^2) + i\sqrt{k^2} \Gamma_{\text{tot}}(k^2)}, \quad (3.5)$$

где  $\Gamma_{\text{tot}}(k^2)$  – полная ширина распада виртуального фотона по всем открытым каналам.

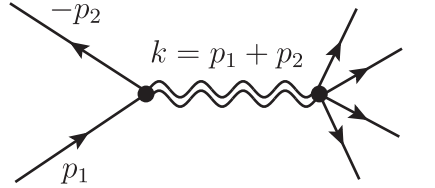
Записанный в такой форме точный пропагатор фотона можно обобщить на случай произвольной виртуальной частицы, по крайней мере в окрестности массовой поверхности. Действительно, точный пропагатор можно записать в следующем виде:

$$G_R(p) = \frac{-i \rho(p)}{p^2 - m^2 - \text{Re } \mu(p^2) + i\sqrt{p^2} \Gamma(p^2)} \Big|_{p^2 \rightarrow m^2}, \quad (3.6)$$

где  $\rho(p)$  – матрица плотности соответствующей частицы. С учетом перенормировки массы  $\text{Re } \mu(p^2) \rightarrow 0$  при  $p^2 \rightarrow m^2$ , поэтому в знаменателе выражения (3.6) для пропагатора можно пренебречь  $\text{Re } \mu(p^2)$  по сравнению с  $\sqrt{p^2} \Gamma(p^2)$ , если частица на массовой поверхности может распадаться без нарушения законов сохранения энергии и импульса. С учетом этих замечаний получим следующее выражение для точного пропагатора:

$$G_R(p) \simeq \frac{-i \rho(p)}{p^2 - m^2 + im \Gamma(m^2)}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь процесс рассеяния, идущий через одночастичное состояние, когда промежуточная частица – векторный бозон с массой  $m$ , а квадрат ее 4-импульса  $s = k^2 = (p_1 + p_2)^2$ , где  $p_i$  – четырехмерные импульсы сталкивающихся частиц, близок к  $m^2$ . Этот процесс можно изобразить следующей диаграммой Фейнмана:



которой соответствует инвариантный матричный элемент:

$$\mathcal{M} = iJ_{\alpha}^{(f)} G_R^{\alpha\beta}(k) j_{\beta}^{(i)}, \quad (3.8)$$

где  $j_{\alpha}^{(i)}$  и  $J_{\alpha}^{(f)}$  – токи начальных и конечных частиц. Далее, в соответствии с общими правилами, находим сечение такого процесса:

$$\sigma_{if} = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int |\mathcal{M}|^2 d\Phi_f. \quad (3.9)$$

Это выражение содержит интеграл по фазовому объему конечных частиц:

$$J_{\alpha\beta}^{(f)} = \sum_{\lambda_f} \int J_{\alpha}^{(f)} J_{\beta}^{(f)*} d\Phi_f, \quad (3.10)$$

где суммирование и интегрирование ведутся по поляризациям и импульсам рассматриваемых частиц. Этот интеграл зависит только от 4-импульса  $k_{\mu}$  промежуточной частицы и может быть представлен в следующем виде:

$$J_{\alpha\beta}^{(f)} = A_f(s) g_{\alpha\beta} + B_f(s) k_{\alpha} k_{\beta}. \quad (3.11)$$

Здесь  $A_f(s)$  выражается через ширину распада  $\Gamma_f$  промежуточной частицы в конечное состояние  $|f\rangle$ . Действительно, амплитуду такого распада можно записать как

$$\mathcal{M}_f = J_{\alpha}^{(f)} \varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)}(k), \quad (3.12)$$

где  $\varepsilon_\alpha^{(\lambda)}$  – вектор поляризации промежуточного бозона, а  $\lambda$  – индекс, нумерующий три поляризации, по которым необходимо усреднить. Для ширины распада находим:

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \frac{(2\pi)^4}{2\sqrt{s}} J_{\alpha\beta}^{(f)} \frac{1}{3} \rho^{\alpha\beta}(k) = \\ &= \frac{(2\pi)^4}{6\sqrt{s}} [A_f(s) g_{\alpha\beta} + B_f(s) k_\alpha k_\beta] \rho^{\alpha\beta}(k) = -\frac{(2\pi)^4}{2\sqrt{s}} A_f(s).\end{aligned}$$

Здесь учтено, что матрица плотности  $\rho_{\alpha\beta}(k)$  ортогональна 4-вектору  $k^\alpha$ , т. е.  $k^\alpha \rho_{\alpha\beta}(k) = 0$ . Таким образом, для искомой функции  $A_f(s)$  получается следующее выражение:

$$A_f(s) = -\frac{2\sqrt{s}}{(2\pi)^4} \Gamma_f. \quad (3.13)$$

Слагаемое с  $k_\alpha k_\beta$  в (3.11) не работает, и  $B_f(s)$  нам не требуется. Подставив (3.11) с учетом (3.13) в выражение для сечения рассеяния (3.9), получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{if} &= \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{\overline{j_\alpha^{(i)} j_\beta^{(i)*}} \rho^{\alpha\mu}(k) J_{\mu\nu}^{(f)}(k) \rho^{\beta\nu}(k)}{(s - m^2)^2 + s \Gamma^2(s)} = \\ &= \frac{\sqrt{s}}{I_{12}(s)} \frac{\overline{j_\alpha^{(i)} j_\beta^{(i)*}} \rho^{\alpha\beta}(k)}{(s - m^2)^2 + s \Gamma^2(s)} \Gamma_f.\end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь учтено, что  $\rho_{\alpha\mu}(k) \rho_{\alpha\nu}(k) = -\rho_{\mu\nu}(k)$ , черта означает усреднение по спинам начальных частиц, и введена кинематическая функция:

$$I_{12}^2(s) = [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] = s^2 f(s).$$

Далее свертку токов начальных частиц можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\overline{j_\alpha^{(i)} j_\beta^{(i)*}} \rho^{\alpha\beta}(k) &= \frac{1}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \sum_{\lambda, \lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}_i|^2 = \\ &= \frac{6\sqrt{s} \Gamma_i}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2\pi)^4 \Phi_i},\end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\Gamma_i$  – ширина распада промежуточной частицы в начальное состояние  $|i\rangle$ , а  $\Phi_i$  – двухчастичный фазовый объем начальных

частиц:

$$\Phi_i = \int \frac{\delta^{(4)}(k - p_1 - p_2) d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6 4E_1 E_2} = \frac{I_{12}(s)}{4s(2\pi)^5}. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.15), с учетом (3.16), в выражение для сечения (3.14), получим:

$$\sigma_{if} = \frac{3}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \frac{16\pi s^2}{I_{12}^2(s)} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(s - m^2)^2 + s \Gamma^2(s)}. \quad (3.17)$$

Формула (3.17) легко обобщается на случай промежуточной частицы произвольного спина:

$$\sigma_{if} = \frac{2J + 1}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \frac{16\pi}{f(s)} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(s - m^2)^2 + s \Gamma^2(s)}, \quad (3.18)$$

для чего достаточно было сделать замену  $3 \rightarrow 2J + 1$ , где  $J$  – спин промежуточной частицы.

**Задание 3.2.** Применяя результаты предыдущего задания, рассмотреть процесс резонансного рассеяния  $e^+ e^- \rightarrow Z \rightarrow \text{all}$ . Учесть явление «резонансного хвоста».

### *Решение*

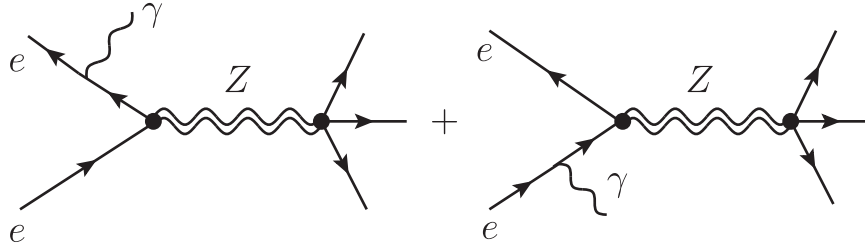
Напомним, что  $Z$ -бозон – векторная частица (спин  $J = 1$ ) с массой  $m_Z \simeq 91.2$  ГэВ. Для сечения рассматриваемого процесса  $e^+ e^- \rightarrow Z \rightarrow \text{all}$  можно воспользоваться выражением (3.17) из предыдущего задания. Заметим, что аннигиляция электрон-позитронной пары в  $Z$ -резонансной области – ультрарелятивистский процесс, поскольку в этой области переменная Мандельштама  $s \simeq m_Z^2 \gg m^2$ , где  $m \simeq 0.511$  МэВ – масса электрона. В этом пределе можно пренебречь массой электрона и формула (3.17) упрощается:

$$\sigma_{if} = \frac{12\pi \Gamma_{ee} \Gamma_{\text{tot}}}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2 \Gamma_{\text{tot}}^2}. \quad (3.19)$$

Здесь  $\Gamma_{ee}$  – электронная ширина распада  $Z \rightarrow e^- e^+$ ,  $\Gamma_{\text{tot}}$  – полная ширина распада  $Z \rightarrow \text{all}$ , а также учтены значения спинов электрона и позитрона  $j_1 = j_2 = 1/2$ .

Явление «резонансного хвоста» состоит в том, что при изучении сечения аннигиляции электрона и позитрона в кинематической области после резонанса, т. е. при условиях  $s > m_Z^2$  и

$m_Z \Gamma_{\text{tot}} \ll s - m_Z^2 \ll m_Z^2$ , излучение начальными частицами относительно мягких фотонов сдвигает энергию виртуального  $Z$ -бозона в резонансную область. Такой радиационный сброс «лишней» энергии электрон-позитронной парой приводит к затяжке правого склона резонансного пика. Процесс аннигиляции в данном случае описывается только двумя диаграммами Фейнмана:



Соответствующая амплитуда имеет вид:

$$\mathcal{M}^{(\gamma)} = e \left[ \frac{(p_1 \varepsilon)}{(p_1 k)} - \frac{(p_2 \varepsilon)}{(p_2 k)} \right] \mathcal{M}_0,$$

где  $e$  – заряд электрона,  $p_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1)$  и  $p_2^\mu = (E_2, \vec{p}_2)$  – 4-импульсы электрона и позитрона,  $\varepsilon^\mu$  и  $k^\mu = (\omega, \vec{k})$  – 4-векторы поляризации и импульса «мягкого» фотона, энергия которого  $\omega \ll E_{1,2}$ , и  $\mathcal{M}_0$  – амплитуда резонансного рассеяния без учета тормозного излучения, квадрат которой содержит «остропиковый» множитель:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - m_Z^2 - \sqrt{s} \omega)^2 + m_Z^2 \Gamma_{\text{tot}}^2} &\simeq \\ &\simeq \frac{\pi}{m_Z \Gamma_{\text{tot}}} \delta(s - m_Z^2 - \sqrt{s} \omega). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Приближенное равенство в этом выражении имеет место благодаря условию  $\Gamma_{\text{tot}} \ll m_Z$ , которое подтверждается существующими экспериментальными данными на массу  $m_Z \simeq 91.2$  ГэВ и полную ширину распада  $\Gamma_{\text{tot}} \simeq 2.5$  ГэВ  $Z$ -бозона. Сечение аннигиляции вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_{if}^{(\gamma)} &= \\ &= e^2 \int d\sigma_0 \int \left[ \frac{s}{(p_1 k)(p_2 k)} - \frac{m^2}{(p_1 k)^2} - \frac{m^2}{(p_2 k)^2} \right] \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Учитывая, что  $d\sigma_0$  содержит множитель (3.20), можно вычислить интеграл по импульсу фотона:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\pi e^2}{m_Z \Gamma_{\text{tot}}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \frac{s}{(p_1 k)(p_2 k)} - \frac{m^2}{(p_1 k)^2} - \frac{m^2}{(p_2 k)^2} \right] \times \\
&\times \delta(s - m_Z^2 - \sqrt{s} \omega) = \frac{2\alpha}{m_Z \Gamma_{\text{tot}}} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \delta(s - m_Z^2 - \sqrt{s} \omega) \times \\
&\times \int_{-1}^1 dx \left[ \frac{1}{1 - v^2 x} - \frac{2m^2}{s} \frac{1}{(1 - v^2 x)^2} \right],
\end{aligned}$$

где проинтегрировано только по сферическому углу  $\varphi$ ,  $\alpha = e^2/(4\pi)$  – постоянная тонкой структуры,  $v = \sqrt{1 - 4m^2/s}$  – скорости электрона и позитрона в системе их центра инерции,  $x = \cos \theta$ ,  $\theta$  – полярный угол, который отсчитывается от оси  $Oz$ , направленной вдоль импульса электрона  $\vec{p}_1$ . Справа от резонанса, т.е. при  $s > m_Z^2$ , область интегрирования по энергии содержит точку  $\omega = (s - m_Z^2)/\sqrt{s}$ . Проинтегрировав по переменным  $\omega$  и  $x$ , получим:

$$J = \frac{2\alpha}{m_Z \Gamma_{\text{tot}}} \frac{1}{s - m_Z^2} \left[ \ln \frac{m_Z^2}{m^2} - 1 \right]. \quad (3.22)$$

Подставив это выражение в (3.21), найдем:

$$\sigma_{if}^{(\gamma)} = 2\alpha \sigma_0 \frac{m_Z \Gamma_{\text{tot}}}{s - m_Z^2} \left[ \ln \frac{m_Z^2}{m^2} - 1 \right], \quad (3.23)$$

где  $\sigma_0$  – значение сечения аннигиляции без учета тормозного излучения в точке  $Z$ -резонанса ( $s = m_Z^2$ ):

$$\sigma_0 = \frac{12\pi \Gamma_{ee}}{m_Z^2 \Gamma_{\text{tot}}}. \quad (3.24)$$

Сложив выражения для сечения  $\sigma_{if}^{(\gamma)}$  (3.23) с сечением без учета излучения (3.19), в котором учтено, что  $s - m_Z^2 \gg m_Z \Gamma_{\text{tot}}$ , окончательно получаем:

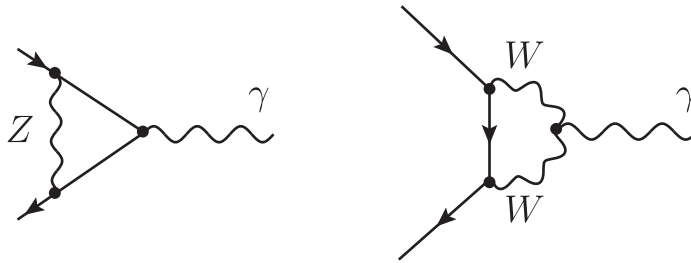
$$\sigma_{if} = \sigma_0 \left\{ \frac{m_Z^2 \Gamma_{\text{tot}}^2}{(s - m_Z^2)^2} + 2\alpha \frac{m_Z \Gamma_{\text{tot}}}{s - m_Z^2} \left[ \ln \frac{m_Z^2}{m^2} - 1 \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Отметим, что величина  $\alpha [\ln(m_Z^2/m^2) - 1] \simeq 0.18$ , где использовано значение постоянной тонкой структуры на масштабе массы  $Z$ -бозона  $\alpha \simeq 1/129$ , во втором слагаемом хотя и имеет усиление логарифмом, но остается относительно маленькой. Как следствие, радиационный вклад в сечение сравнивается по величине с основным при условии  $s - m_Z^2 \gtrsim 3m_Z \Gamma_{\text{tot}}$ .

**Задание 3.3.** Вычислить аномальный магнитный момент заряженного лептона, обусловленный тяжелыми векторными  $W$ - и  $Z$ -бозонами, в модели электрослабого взаимодействия Вайнберга-Салама-Глэшоу.

*Решение*

Вычисление аномального магнитного момента заряженного лептона сводится к вычислению магнитного формфактора при  $q^2 = (p_2 - p_1)^2 = 0$  (см. задание 2.3). Отметим, что процедура перенормировки не затрагивает магнитный член в вершине, т. к. последний пропорционален 4-импульсу фотона  $q_\alpha$ , а перенормировка производится при  $q_\alpha = 0$ . Поэтому при вычислении вершинной функции будем следить только за членами, содержащими  $\sigma^{\alpha\beta} q_\beta$ . Это существенно упрощает вычисления, которые удобно проводить в унитарной калибровке. В этом случае вклад в аномальный магнитный момент заряженного лептона дают только две диаграммы Фейнмана:



По правилу (1.29), определенному в задании 1.4, находим для вкладов в вершинную функцию следующие выражения, соответствующие приведенным диаграммам:

$$\Lambda_\alpha^{(Z)} = \frac{G_F m_Z^2}{2\sqrt{2}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{N}_\alpha^{(Z)}}{[(p+q)^2 - m^2][p^2 - m^2][(p-p_1)^2 - m_Z^2]},$$

$$\Lambda_\alpha^{(W)} = \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{N}_\alpha^{(Z)}}{[p^2 - m^2] [k_1^2 - m_W^2] [k_2^2 - m_W^2]},$$

где  $k_1^\mu = p^\mu - p_1^\mu$  и  $k_2^\mu = p^\mu - p_2^\mu$ ,  $m$ ,  $m_Z$  и  $m_W$  – массы лептона,  $Z$ - и  $W$ -бозонов соответственно,  $G_F$  – константа Ферми:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 \sin^2 \theta_W m_W^2},$$

зависящая от угла Вайнберга  $\theta_W$ . Числители интегралов  $\mathcal{N}_\alpha^{(Z)}$  и  $\mathcal{N}_\alpha^{(W)}$  – дираковские матрицы вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\alpha^{(Z)} &= \\ &= [(v - a\gamma_5) \gamma^\mu (\hat{p} + \hat{q} + m) \gamma_\alpha (\hat{p} + m) \gamma^\nu (v + a\gamma_5)] \rho_{\mu\nu}^{(Z)}(p - p_1), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\alpha^{(W)} &= \\ &= [(1 - \gamma_5) \gamma^\mu \hat{p} \gamma^\nu (1 + \gamma_5)] \rho_{\mu\sigma}^{(W)}(k_2) \Gamma_\alpha^{\sigma\beta}(k_1, k_2) \rho_{\beta\nu}^{(W)}(k_1). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В нейтральном лептонном токе векторная и аксиальная константы заряженного лептона обозначены как  $v = 1 - 4 \sin^2 \theta_W$  и  $a = 1$  соответственно. Матрицы плотности  $Z$ - и  $W$ -бозонов выбираются в унитарной калибровке:

$$\rho_{\mu\nu}^{(Z,W)}(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{Z,W}^2}.$$

В (3.27) введена вершина взаимодействия  $W$ -бозонов с фотоном:

$$\Gamma_\alpha^{\sigma\beta}(k_1, k_2) = (k_1 + k_2)_\alpha g^{\sigma\beta} + (k_2 - 2k_1)^\sigma \delta_\alpha^\beta + (k_1 - 2k_2)^\beta \delta_\alpha^\sigma,$$

причем в дальнейшем нам понадобятся несколько сверток вершины вида:

$$\begin{aligned} k_{2\sigma} \Gamma_\alpha^{\sigma\beta}(k_1, k_2) &= k_{1\alpha} k_1^\beta - q_\alpha q^\beta + (q^2 - k_1^2) \delta_\alpha^\beta, \\ \Gamma_\alpha^{\sigma\beta}(k_1, k_2) k_{1\beta} &= k_{2\alpha} k_2^\sigma - q_\alpha q^\sigma + (q^2 - k_2^2) \delta_\alpha^\sigma, \\ k_{2\sigma} \Gamma_\alpha^{\sigma\beta}(k_1, k_2) k_{1\beta} &= q^2 k_{2\alpha} - (q k_2) q_\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что в  $Z$ -вершине члены в пропагаторе  $Z$ -бозона, пропорциональные  $k_\mu k_\nu$ , не дают вклада в магнитный формфактор



при  $q^2 \rightarrow 0$ . Далее, учитывая, что  $m \ll m_{Z,W}$  и  $q^2 \rightarrow 0$ , знаменатели пропагаторов раскладываем в ряд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[(p+q)^2 - m^2][(p-p_1)^2 - m_Z^2]} \simeq \frac{1}{[p^2 - m^2][p^2 - m_Z^2]} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{2(pq)}{p^2 - m^2} + \frac{4(pq)^2}{[p^2 - m^2]^2} + \dots \right] \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{2(p_1 p)}{p^2 - m_Z^2} + \frac{4(p_1 p)^2}{[p^2 - m_Z^2]^2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[k_1^2 - m_W^2][k_2^2 - m_W^2]} \simeq \\ & \simeq \frac{1}{[p^2 - m_W^2]^2} \left[ 1 + \frac{2(p_1 p)}{p^2 - m_W^2} + \frac{4(p_1 p)^2}{[p^2 - m_W^2]^2} + \dots \right] \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{2(p_2 p)}{p^2 - m_W^2} + \frac{4(p_2 p)^2}{[p^2 - m_W^2]^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тогда для  $\Lambda_\alpha^{(Z)}$  получим:

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^{(Z)} &= \frac{G_F m_Z^2}{2\sqrt{2}} \times \\ & \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(v - a\gamma_5)[-2\hat{p}\gamma_\alpha\hat{p} - 2\hat{p}\gamma_\alpha\hat{q} + 8m p_\alpha](v + a\gamma_5)}{[p^2 - m^2]^2[p^2 - m_Z^2]} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{2(pq)}{p^2 - m^2} + \frac{2(p_1 p)}{p^2 - m_Z^2} + \frac{4(p_1 p)^2}{[p^2 - m_Z^2]^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь многоточием обозначены члены, не дающие вклад в магнитный момент.

Заметим, что под знаком интеграла в числителе можно произвести замены:

$$p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{1}{4} p^2 g_{\mu\nu}, \quad p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \rightarrow \frac{1}{24} (p^2)^2 [g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}],$$

а все нечетные степени 4-импульса  $p^\mu$  можно опустить по причине отсутствия выделенного направления в пространстве импульсов. После этого интегрирование в выражении (3.30) по  $p^\mu$  труда не

представляет и для вершинной функции получаем:

$$\Lambda_{\alpha}^{(Z)} = \frac{-iG_F}{2\sqrt{2}(4\pi)^2} \times \quad (3.31)$$

$$\times \left[ -\frac{2}{3} (v - a\gamma_5)^2 (\hat{p}_1 \gamma_{\alpha} \hat{q} - \hat{q} \gamma_{\alpha} \hat{p}_1) + 4m p_{1\alpha} (v^2 - a^2) \right] + \dots$$

Используя в (3.31) уравнения Дирака для  $\hat{p}_2$  слева и  $\hat{p}_1$  справа, приведем индуцированную  $Z$ -бозоном часть вершинной функции к окончательному виду:

$$\Lambda_{\alpha}^{(Z)} = \frac{-iG_F m^2}{8\sqrt{2} \pi^2} \left[ \frac{\sigma_{\alpha\beta} q^{\beta}}{2m} \right] \frac{v^2 - 5a^2}{3} + \dots \quad (3.32)$$

Аналогично проведем вычисления для  $\Lambda_{\alpha}^{(W)}$ , индуцированной  $W$ -бозонами:

$$\Lambda_{\alpha}^{(W)} = \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(1 - \gamma_5) \gamma^{\mu} \hat{p} \gamma^{\nu} (1 + \gamma_5)}{p^2 [k_1^2 - m_W^2] [k_2^2 - m_W^2]} \times \quad (3.33)$$

$$\times \left\{ (k_1 + k_2)_{\alpha} g_{\mu\nu} + (k_2 - 2k_1)^{\mu} g_{\alpha\nu} + (k_1 - 2k_2)^{\nu} g_{\alpha\mu} - \right.$$

$$- \frac{1}{m_W^2} [k_{2\mu} k_{1\nu} k_{1\alpha} + k_{2\mu} k_{1\nu} k_{2\alpha} - (k_1^2 - m_W^2) k_{2\mu} g_{\alpha\nu} +$$

$$\left. - (k_2^2 - m_W^2) k_{1\nu} g_{\alpha\mu}] + k_{2\mu} g_{\alpha\nu} + k_{1\nu} g_{\alpha\mu} \right\}.$$

Здесь отброшены члены, билинейные по импульсу фотона  $q^{\mu}$ . Члены, пропорциональные  $1/m_W^2$ , вклада не дают. Разложив в (3.33) знаменатели пропагаторов  $W$ -бозов в ряд (3.29), получим следующее выражение:

$$\Lambda_{\alpha}^{(W)} = \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(1 - \gamma_5)}{[p^2 - m_W^2]^2} \left\{ -(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) (p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) + \right.$$

$$+ \frac{2p^2 [(2p_{1\alpha} + p_{2\alpha}) \hat{p}_1 + (2p_{2\alpha} + p_{2\alpha}) \hat{p}_2]}{3(p^2 - m_W^2)} + \quad (3.34)$$

$$\left. + \hat{q} (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \gamma_{\alpha} - \gamma_{\alpha} (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) \hat{q} \right\}.$$

Все интегралы по 4-импульсу в (3.34) легко вычисляются. Используя уравнения Дирака и коммутационные соотношения для

$\gamma$ -матриц, получим:

$$\Lambda_{\alpha}^{(W)} = \frac{-iG_F m^2}{4\sqrt{2}\pi^2} \left[ \frac{\sigma_{\alpha\beta} q^{\beta}}{2m} \right] \frac{5}{3} + \dots \quad (3.35)$$

Сложив (3.32) и (3.35), найдем аномальный магнитный момент заряженного лептона, обусловленный  $W$ - и  $Z$ -бозонами:

$$\Delta\mu_{\ell}^{(W,Z)} = \frac{e}{2m} \frac{G_F m^2}{\sqrt{2}\pi^2} \left[ \frac{2}{3} \sin^4 \theta_W - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{1}{4} \right], \quad (3.36)$$

где учтено, что  $v = 1 - 4 \sin^2 \theta_W$  и  $a = 1$ .

**Задание 3.4.** Вычислить амплитуду и вероятность радиационного распада фермиона с нарушением аромата  $f_i \rightarrow f_j + \gamma$  в модели электрослабого взаимодействия Вайнберга-Салама-Глэшоу со смешиванием.

### Решение

С учетом смешивания лагранжиан слабого взаимодействия заряженного тока имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^W(x) &= \\ &= \left[ \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}} \right]^{1/2} [\bar{f}(x) \Gamma_- \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) f(x)] W^{\alpha}(x) + \text{h. c.}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где  $\Gamma_- = \Gamma_1 - i\Gamma_2$  – комбинация генераторов  $SU(2)$ -группы со смешиванием, которые могут быть записаны в блочном представлении:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & K^{\dagger} \\ K & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -iK^{\dagger} \\ iK & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

здесь  $K$  – унитарная матрица смешивания типа Кабиббо-Кобаяши-Маскава. Введенные матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям:

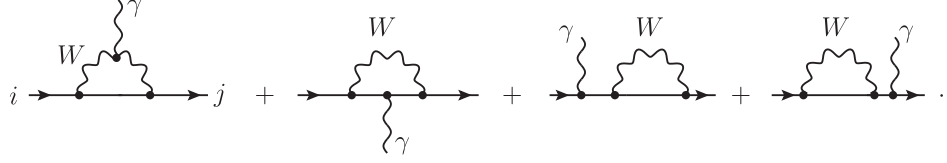
$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = i\varepsilon_{abc} \Gamma_c,$$

где  $\varepsilon_{abc}$  – полностью антисимметричный тензор Леви-Чевита.

Фермионы преобразуются как компоненты приводимого фундаментального представления группы  $SU(2)$ , т. е. объединяются в дублеты вида:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^u(x) \\ f^d(x) \end{pmatrix}.$$

Процесс радиационного распада  $f_i \rightarrow f_j + \gamma$  в унитарной калибровке описывается набором из четырех диаграмм Фейнмана:



Амплитуда распада, удовлетворяющая условию калибровочной инвариантности, с учетом киральности слабого взаимодействия может быть представлена в виде:

$$\mathcal{M} = \mathcal{N} [\bar{u}_L(p_j) (\hat{p}\gamma^\mu \hat{q} - \hat{q}\gamma^\mu \hat{p}) u_L(p_i)] \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \quad (3.38)$$

где  $p^\mu = p_i^\mu + p_j^\mu$ ,  $q^\mu = p_i^\mu - p_j^\mu$  и  $u_L(p_{i,j}) = (1 + \gamma_5) u(p_{i,j})/2$  – левый биспинор. Таким образом, задача сводится к нахождению множителя  $\mathcal{N}$ , который будет разным в распадах верхних и нижних компонент фермионного дублета. Отметим, что две последние диаграммы не дают калибровочно-инвариантного вклада в амплитуду. Вычисление инвариантных амплитуд, описываемых двумя первыми диаграммами Фейнмана, полностью аналогично вычислению аномального магнитного момента лептона из предыдущего задания. Все интегралы по четырехмерным импульсам легко вычисляются. Для первой амплитуды получим:

$$\mathcal{N}_1 = \frac{G_F e}{2\sqrt{2} (4\pi)^2 m_W^2} (\Gamma_+ M_f^2 \Gamma_- - \Gamma_- M_f^2 \Gamma_+)_{ij}, \quad (3.39)$$

где  $M_f^2$  – квадрат массовой матрицы фермионов:

$$M_f = \begin{pmatrix} M^u & 0 \\ 0 & M^d \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

и  $M^u$  ( $M^d$ ) – массовые матрицы верхних (нижних) компонент фермионных дублетов. Аналогично для второй диаграммы получим:

$$\mathcal{N}_2 = \frac{G_F e}{\sqrt{2} (4\pi)^2 m_W^2} (\Gamma_+ Q_f M_f^2 \Gamma_- + \Gamma_- Q_f M_f^2 \Gamma_+)_{ij}, \quad (3.41)$$

где  $Q_f$  – зарядовая матрица фермионов, связанная с гиперзарядом  $Y$  дублета соотношением:

$$Q_f = \Gamma_3 + \frac{Y}{2}.$$

Коммутатор  $Q_f$  с матрицами  $\Gamma_{\pm}$  равен:

$$[\Gamma_{\pm}, Q_f] = [\Gamma_{\pm}, \Gamma_3] = \pm \Gamma_{\pm}. \quad (3.42)$$

Сложив (3.39) и (3.41) с учетом (3.42), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{G_F e}{2\sqrt{2} (4\pi)^2 m_W^2} \times \\ &\times \left[ (2 - Y) \Gamma_+ Q_f M_f^2 \Gamma_- - (2 + Y) \Gamma_- Q_f M_f^2 \Gamma_+ \right]_{ij}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Отметим, что произведение  $\Gamma_+ \Gamma_-$  отлично от нуля только для верхних компонент дублета, а  $\Gamma_- \Gamma_+$  – для нижних. Таким образом, амплитуда распада верхних фермионов  $f_i^u \rightarrow f_j^u + \gamma$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(u)} &= \frac{G_F e (2 - Y)}{2\sqrt{2} (4\pi)^2 m_W^2} \times \\ &\times \sum_f K_{fi} K_{fj}^* (m_f^d)^2 \left[ \bar{u}_L(p_j) \left( \hat{p} \hat{\varepsilon}^{(\lambda)} \hat{q} - \hat{q} \hat{\varepsilon}^{(\lambda)} \hat{p} \right) u_L(p_i) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для того чтобы получить амплитуду  $\mathcal{M}^{(d)}$  распада нижней компоненты, достаточно в (3.44) сделать замену:

$$Y \rightarrow -Y, \quad (m_f^d)^2 \rightarrow (m_f^u)^2, \quad K \leftrightarrow K^\dagger. \quad (3.45)$$

По стандартным правилам вычисляем квадрат матричного элемента, просуммировав по поляризациям конечных частиц и усреднив по поляризациям начальных:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i, \lambda_j} \left| \mathcal{M}^{(u)} \right|^2 &= \\ &= \frac{G_F^2 \alpha}{2(4\pi)^3} (2 - Y)^2 \left| \frac{\mu_{ij}^2}{m_W^2} \right|^2 (m_i^2 + m_j^2) (m_i^2 - m_j^2)^2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где учтено, что  $e^2 = 4\pi\alpha$  и введено обозначение:

$$\mu_{ij}^2 \equiv \sum_f K_{fi} K_{fj}^* (m_f^d)^2. \quad (3.47)$$

Учитывая, что квадрат амплитуды (3.46) – постоянная величина, интегральную вероятность распада получим просто умножением

на двухчастичный фазовый объем (3.16), в котором положим  $s = m_i^2$ ,  $m_1 = 0$  и  $m_2 = m_j$ :

$$\Phi = \frac{m_i^2 - m_j^2}{4m_i^2 (2\pi)^5}.$$

В итоге для вероятности распада верхней компоненты дублета  $f_i^u \rightarrow f_j^u + \gamma$  получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} W(f_i^u \rightarrow f_j^u + \gamma) &= \\ &= \frac{G_F^2 m_i^5}{192\pi^3} \frac{3\alpha}{32\pi} (2 - Y)^2 \left| \frac{\mu_{ij}^2}{m_W^2} \right|^2 \left( 1 + \frac{m_j^2}{m_i^2} \right) \left( 1 - \frac{m_j^2}{m_i^2} \right)^3. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Отметим, что формулы для амплитуды и вероятности распада определены в приближении  $m_i, m_j, m_f \ll m_W$ , где  $m_W$  – масса  $W$ -бозона.

**Задание 3.5.** Вычислить магнитный момент массивного дираковского нейтрино в модели электрослабого взаимодействия Вайнберга-Салама-Глэшоу.

*Решение*

В отличие от заряженного лептона, нейтрино не имеет электрического заряда и, как следствие, не обладает нормальным (классическим) магнитным моментом. Более того, и аномальный магнитный момент, обусловленный эффектами КЭД, также отсутствует у нейтрино. Однако свойство нейтрино участвовать в слабых взаимодействиях приводит к возникновению магнитного момента  $\mu_\nu$ , если масса нейтрино  $m_\nu$  отлична от нуля.

В предположении, что массивное нейтрино является дираковским фермионом, аномальный магнитный момент нейтрино вычисляется в полной аналогии с расчетами электрослабого вклада в аномальный магнитный момент электрона (см. задание 3.3). Не повторяя деталей расчетов, приведем окончательный результат:

$$\mu_\nu^{(0)} = \frac{3eG_F m_\nu}{8\pi^2 \sqrt{2}} \simeq 3.2 \times 10^{-19} \left( \frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}} \right) \mu_B, \quad (3.49)$$

где  $m_\nu$  – масса дираковского нейтрино,  $e$  – элементарный заряд и  $G_F$  – константа Ферми. Отметим, что в рассматриваемом приближении у безмассового нейтрино ( $m_\nu = 0$ ) магнитный момент

отсутствует. Выражение (3.49) впервые было получено Б. Ли и Р. Шроком в 1977 г. в пределе  $\lambda \equiv m_e^2/m_W^2 \rightarrow 0$ . Поправки, обусловленные этим отношением, также известны, и соответствующее выражение имеет следующий вид:

$$\mu_\nu = \mu_\nu^{(0)} \left[ \frac{2 - 5\lambda + \lambda^2}{2(1 - \lambda)^2} - \frac{\lambda^2 \ln \lambda}{(1 - \lambda)^3} \right]. \quad (3.50)$$

Следует заметить, что приведенная формула может быть получена как предельный случай скалярного формфактора в массовом операторе нейтрино, вычисленного в технике точных пропагаторов электрона и  $W$ -бозона, помещенных во внешнее постоянное и однородное магнитное поле. Поскольку указанный формализм не является предметом изучения данного курса, то этим замечанием мы здесь и ограничимся.

Из эксперимента получены только верхние ограничения (на 90 %-м уровне достоверности) на величину магнитного момента нейтрино всех типов:

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_e} &< 2.9 \times 10^{-11} \mu_B, \\ \mu_{\nu_\mu} &< 6.8 \times 10^{-10} \mu_B, \\ \mu_{\nu_\tau} &< 3.9 \times 10^{-7} \mu_B, \end{aligned} \quad (3.51)$$

причем эти значения на много порядков превосходят теоретические предсказания Стандартной модели. Заметим, что ограничение на магнитный момент электронного нейтрино  $\nu_e$  был получен коллаборацией GEMMA на основе измерений, выполненных на Калининской атомной электростанции.

**Задание 3.6.** Вычислить вероятность радиационного распада хиггсовского бозона  $H \rightarrow 2\gamma$  в рамках Стандартной модели.

*Решение*

Двухфотонный распад хиггсовского бозона представляет собой один из основных каналов его наблюдения на Большом адронном коллайдере. Этот процесс полностью обусловлен квантовыми петлевыми эффектами, причем вклад в амплитуду дают все электрически заряженные частицы, а именно векторные  $W$ -бозоны и фундаментальные фермионы: кварки и заряженные лептоны. Поскольку интенсивность взаимодействия ферми-

она с хиггсовским бозоном пропорциональна его массе, то амплитуда распада, индуцированная заряженными фермионами, в основном насыщается вкладом  $t$ -кварка. Вычислим требуемые амплитуды и сравним следующую из них вероятность распада с экспериментально измеренным на Большом адронном коллайдере значением.

Из общих соображений очевидно, что калибровочно-инвариантная амплитуда распада  $H \rightarrow 2\gamma$  должна иметь следующий вид:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2 g \mathcal{F}}{(4\pi)^2 m_W} [(k_1 k_2) g^{\mu\nu} - k_2^\mu k_1^\nu] \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2), \quad (3.52)$$

где  $e$  – элементарный заряд,  $g$  – константа неабелевой группы  $SU(2)_L$  Стандартной модели, которая связана с массой  $W$ -бозона  $m_W$  и константой Ферми  $G_F$  соотношением:  $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8m_W^2)$ . Импульсы фотонов обозначены как  $k_1^\mu$  и  $k_2^\mu$ , а их векторы поляризации –  $\varepsilon^\mu(k_1)$  и  $\varepsilon^\mu(k_2)$  соответственно, причем предполагается, что частицы находятся на массовой поверхности:

$$k_1^2 = k_2^2 = 0, \quad k_1^\mu \varepsilon_\mu(k_1) = k_2^\nu \varepsilon_\nu(k_2) = 0. \quad (3.53)$$

Вектор  $q^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$  – четырехмерный импульс хиггсовского бозона с массой  $m_H$  – удовлетворяет условию:

$$q^2 = 2(k_1 k_2) = m_H^2 \quad (3.54)$$

в предположении, что рассматриваемый бозон – реальная частица.

Безразмерная константа  $\mathcal{F}$  в формуле (3.52) содержит вклады  $W$ -бозонной и фермионной петель и может быть записана в виде суммы:

$$\mathcal{F} = F_W(\beta_W) + \sum_f N_c Q_f^2 F_f(\beta_f), \quad (3.55)$$

где  $N_c$  – цветовой множитель ( $N_c = 1$  для лептонов и  $N_c = 3$  для кварков), суммирование проводится по всем фермионным ароматам,  $Q_f$  – относительный электрический заряд фермиона с массой  $m_f$ ,

$$\beta_W = \frac{4m_W^2}{m_H^2}, \quad \beta_f = \frac{4m_f^2}{m_H^2}$$



и  $m_H$  – масса хиггсовского бозона. Две функции, определяющие численное значение  $\mathcal{F}$  в Стандартной модели, имеют вид:

$$F_W(\beta) = 2 + 3\beta + 3\beta(2 - \beta)f(\beta), \quad (3.56)$$

$$F_f(\beta) = -2\beta[1 + (1 - \beta)f(\beta)] \quad (3.57)$$

и выражаются посредством вспомогательной функции:

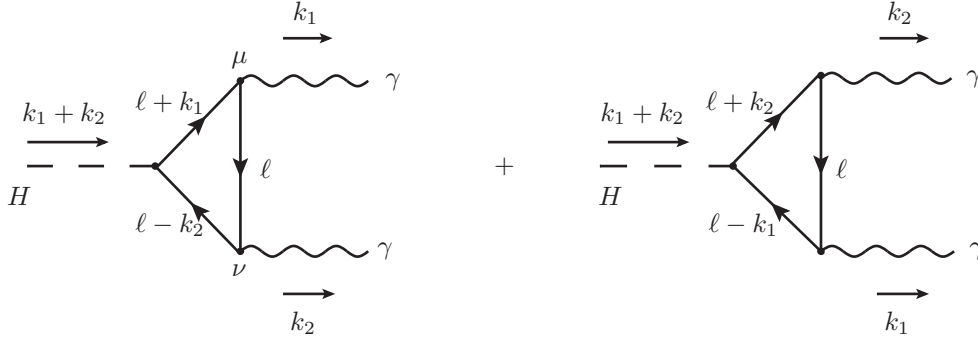
$$f(\beta) = \begin{cases} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{\beta}}, & \text{при } \beta \geq 1, \\ -\frac{1}{4} \left[ \ln \frac{1+\sqrt{1-\beta}}{1-\sqrt{1-\beta}} - i\pi \right]^2, & \text{при } \beta < 1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Функции  $F_f(\beta)$  и  $F_W(\beta)$  и будут вычисляться в этом задании.

Вклад фермионов определяется двумя треугольными диаграммами, внешними линиями которых будут два фотона и хиггсовский бозон. Требуемые лагранжианы взаимодействия имеют вид:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_f \left[ eQ_f (\bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f) A_\mu - \frac{gm_f}{2m_W} (\bar{\psi}_f \psi_f) H \right]. \quad (3.59)$$

Инвариантная амплитуда  $\mathcal{M}_f$  фермиона с ароматом  $f$  равна сумме двух вкладов, изображенных следующими диаграммами:



Соответствующие этим диаграммам амплитуды имеют вид:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{ie^2g}{2m_W} Q_f^2 m_f \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \int \frac{d^N \ell}{(2\pi)^N} \times \quad (3.60)$$

$$\times \text{Sp} \left\{ \frac{\hat{\ell} - \hat{k}_2 + m_f}{(\ell - k_2)^2 - m_f^2} \gamma^\nu \frac{\hat{\ell} + m_f}{\ell^2 - m_f^2} \gamma^\mu \frac{\hat{\ell} + \hat{k}_1 + m_f}{(\ell + k_1)^2 - m_f^2} \right\},$$

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{ie^2g}{2m_W} Q_f^2 m_f \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \int \frac{d^N \ell}{(2\pi)^N} \times \quad (3.61)$$

$$\times \text{Sp} \left\{ \frac{\hat{\ell} + \hat{k}_1 + m_f}{(\ell + k_1)^2 - m_f^2} \gamma^\mu \frac{\hat{\ell} + m_f}{\ell^2 - m_f^2} \gamma^\nu \frac{\hat{\ell} - \hat{k}_2 + m_f}{(\ell - k_2)^2 - m_f^2} \right\}.$$

Поскольку каждая из диаграмм содержит замкнутую фермионную петлю, то в них был добавлен дополнительный множитель  $(-1)$ . После вычисления шпуров  $\gamma$ -матриц амплитуда примет вид:

$$\mathcal{M} = \frac{4ie^2g}{m_W} Q_f^2 m_f^2 \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \int \frac{d^N \ell}{(2\pi)^N} \times \quad (3.62)$$

$$\times \frac{4\ell^\mu \ell^\nu - \ell^2 g^{\mu\nu} + k_1^\nu k_2^\mu + [m_f^2 - (k_1 k_2)] g^{\mu\nu}}{[\ell^2 - m_f^2] [(\ell + k_1)^2 - m_f^2] [(\ell - k_2)^2 - m_f^2]}.$$

Теперь надо вычислить два интеграла – скалярный  $S$  и тензорный  $T^{\mu\nu}$ :

$$S = \int \frac{d^N \ell}{(2\pi)^N} \frac{1}{[\ell^2 - m_f^2] [(\ell + k_1)^2 - m_f^2] [(\ell - k_2)^2 - m_f^2]},$$

$$T^{\mu\nu} = \int \frac{d^N \ell}{(2\pi)^N} \frac{4\ell^\mu \ell^\nu - \ell^2 g^{\mu\nu}}{[\ell^2 - m_f^2] [(\ell + k_1)^2 - m_f^2] [(\ell - k_2)^2 - m_f^2]}.$$

В четырехмерном пространстве след тензора  $T^{\mu\nu}$  обращается в нуль, однако в произвольном  $N$ -мерном пространстве это не так. Объединив пропагаторы методом фейнмановской параметризации, сделав сдвигку переменной интегрирования и совершив переход в евклидово пространство новой переменной интегрирования, оба интеграла можно легко вычислить. В результате получатся следующие двукратные интегралы:

$$S = \frac{-i(m_f^2)^{N/2-3}}{2(4\pi)^{N/2}} \Gamma\left(3 - \frac{N}{2}\right) \times$$

$$\times \int_0^1 dx_1 \int_0^1 du [1 - 4x_1(1 - x_1)u/\beta_f]^{N/2-3},$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{-i(m_f^2)^{N/2-3}}{2(4\pi)^{N/2}} \Gamma\left(3 - \frac{N}{2}\right) \times$$

$$\times \int_0^1 dx_1 \int_0^1 du [1 - 4x_1(1 - x_1)u/\beta_f]^{N/2-3} \times$$

$$\times \{4x_1(1 - x_1)u[(k_1 k_2)g^{\mu\nu} - k_1^\nu k_2^\mu] - m_f^2 g^{\mu\nu}\},$$

где для удобства введена новая переменная  $u = x_2^2$ . После подстановки этих интегралов в инвариантную амплитуду (3.62) слагаемые в числителе, содержащие квадрат массы фермиона, сократятся и останется тензорная структура, ортогональная векторам  $k_1^\mu$  и  $k_2^\nu$ , как того и требует калибровочная инвариантность КЭД:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{2e^2g}{m_W} Q_f^2 \times \\ & \times [(k_1 k_2) g^{\mu\nu} - k_2^\mu k_1^\nu] \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \frac{(m_f^2)^{N/2-2}}{(4\pi)^{N/2}} \Gamma\left(3 - \frac{N}{2}\right) \times \\ & \times \int_0^1 dx_1 \int_0^1 du [1 - 4x_1(1-x_1)u] [1 - 4x_1(1-x_1)u/\beta_f]^{N/2-3}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Полученное выражение имеет конечный предел при  $N \rightarrow 4$ , которое и имеет реальный физический смысл. В этом пределе амплитуда упрощается:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{g\alpha Q_f^2}{2\pi m_W} [(k_1 k_2) g^{\mu\nu} - k_2^\mu k_1^\nu] \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \times \\ & \times \int_0^1 dx_1 \int_0^1 du \frac{1 - 4x_1(1-x_1)u}{1 - 4x_1(1-x_1)u/\beta_f}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

где  $\alpha = e^2/(4\pi)$  – постоянная тонкой структуры. Двукратный интеграл вычисляется достаточно просто, и амплитуда принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{g\alpha Q_f^2}{2\pi m_W} \times \\ & \times [(k_1 k_2) g^{\mu\nu} - k_2^\mu k_1^\nu] \varepsilon_\mu^*(k_1) \varepsilon_\nu^*(k_2) \beta_f [1 + (1 - \beta_f) f(\beta_f)], \end{aligned} \quad (3.65)$$

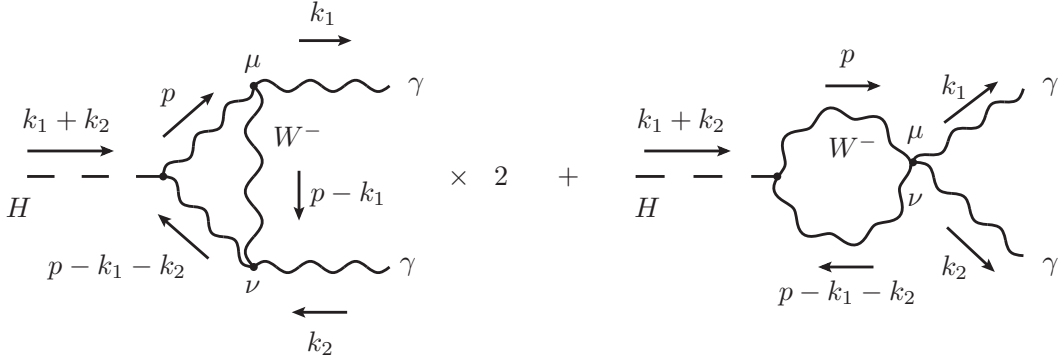
где использована функция  $f(\beta_f)$ , определенная в (3.58). В полученном выражении легко выделить функцию  $F_f(\beta)$ , приведенную в (3.57). Полученный результат в полной мере применим к заряженным лептонам, однако для кварков он требует модификации. Это связано с тем, что кварки, в отличие от лептонов, обладают дополнительным квантовым числом – «цветом»  $N_c = 3$ , учет которого приводит к утроению амплитуды (3.65). Суммируя

по лептонам и кваркам, без труда воспроизводится фермионная часть множителя  $\mathcal{F}$  (3.55).

Перейдем к вычислению вклада  $W$ -бозонов в амплитуду распада. В унитарной калибровке «духи» и голдстоуновские бозоны отсутствуют и требуемые для вычисления амплитуды лагранжианы взаимодействия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} = & ie (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) W^{-\mu} W^{+\nu} + ie (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) A^\mu W^{-\nu} + \\ & + ie (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{+\mu} A^\nu + \\ & + e^2 [(AW^+) (AW^+) - A^2 (W^+ W^-)] + gm_W (W^+ W^-) H.\end{aligned}\quad (3.66)$$

В этой калибровке имеется всего три диаграммы Фейнмана, определяющие вклад массивных заряженных векторных бозонов в амплитуду. Две топологически различные диаграммы изображены на рис. (3.67), а третья получается из треугольной диаграммы перестановкой фотонов.



Множитель «2» у первой диаграммы указывает на то, что вклады исходной диаграммы и аналогичной с перестановкой фотонов полностью идентичны.

Не представляет труда записать амплитуду процесса, которая после несложных преобразований может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = & \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \times \\ & \times [\mathcal{K}_1 g^{\mu\nu} + \mathcal{K}_2 p^\mu p^\nu + \mathcal{K}_3 p^\mu k_1^\nu + \mathcal{K}_4 k_2^\mu p^\nu + \mathcal{K}_5 k_2^\mu k_1^\nu] \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2),\end{aligned}\quad (3.67)$$

где введен следующий набор скалярных функций при тензорных

структурах:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 = & \frac{2ie^2g}{m_W^3} \frac{1}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} \times \\ & \times \left\{ 2(pk_1)^3 - 2(pk_1)(pk_2)^2 + 2(p^2 - 3m_W^2)(pk_1)(pk_2) - \right. \\ & - 3(p^2 - m_W^2)(pk_1)^2 + (p^2 - m_W^2)(pk_2)^2 + 2(1 - N)m_W^4(pk_1) + \\ & + (p^2 - m_W^2)^2(pk_1) - (p^2 - m_W^2)^2(pk_2) + \\ & \left. + m_W^2[(N - 1)m_W^2 + m_H^2](p^2 - m_W^2) + 4m_W^4m_H^2 \right\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_2 = -\frac{4ie^2g}{m_W} \frac{m_H^2 + 2(N - 1)m_W^2}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3 = & -\frac{ie^2g}{m_W^3} \frac{1}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} \times \\ & \times \left[ (p^2)^2 - 3(p^2 - 3m_W^2)(pk_1) - (p^2 + 7m_W^2)(pk_2) - \right. \\ & \left. - 5p^2m_W^2 + 2(pk_1)(pk_2) + 2(pk_1)^2 - 4(2N - 3)m_W^4 \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_4 = & \frac{ie^2g}{m_W^3} \frac{1}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} \times \\ & \times \left[ (p^2 - m_W^2)(p^2 - 4m_W^2) - (3p^2 - 17m_W^2)(pk_1) - \right. \\ & \left. - (p^2 - m_W^2)(pk_2) + 2(pk_1)(pk_2) + 2(pk_1)^2 \right],\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_5 = -\frac{4ie^2g}{m_W} \frac{p^2 + 3m_W^2}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]}.$$

Функции  $\mathcal{K}_1$ ,  $\mathcal{K}_3$  и  $\mathcal{K}_4$  можно переписать как

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 = & -\frac{ie^2g}{2m_W^3} \left\{ -\frac{2(pk_1) - 2(pk_2) + m_H^2}{p^2 - m_W^2} - \frac{2(pk_1) - 2(pk_2) - m_H^2 - 4m_W^2}{(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2} - \right. \\ & - \frac{4m_W^2}{(p - k_1)^2 - m_W^2} - \frac{4(m_H^2 + 2m_W^2)(pk_2) - 4(1 - N)m_W^4 - m_H^4}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} - \\ & \left. - \frac{16m_H^2m_W^4}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3 = & -\frac{ie^2g}{2m_W^3} \left\{ \frac{1}{p^2 - m_W^2} + \frac{1}{(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2} + \right. \\ & + \frac{8m_W^2}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2]} - \frac{m_H^2 + 14m_W^2}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} + \\ & \left. + \frac{8m_W^2 [2(1 - N)m_W^2 - m_H^2]}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} \right\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_4 = -\frac{ie^2g}{2m_W^3} \left\{ -\frac{1}{p^2 - m_W^2} + \frac{m_H^2 + 14m_W^2}{(p^2 - m_W^2) [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2} - \frac{8m_W^2}{[(p - k_1)^2 - m_W^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m_W^2]} \right\}.$$

Интегралы от функций  $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_5$  могут быть выражены через интегралы Пассарино-Вельтмана, а затем сведены к набору скалярных интегралов  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$ , которые определяются следующим образом:

$$\frac{i}{(4\pi)^2} A_0(m_0^2) = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \frac{1}{p^2 - m_0^2}, \quad (3.68)$$

$$\frac{i}{(4\pi)^2} B_0(q_1^2, m_0^2, m_1^2) = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \frac{1}{[p^2 - m_0^2] [(p + q_1)^2 - m_1^2]}, \quad (3.69)$$

$$\frac{i}{(4\pi)^2} C_0(q_1^2, q_2^2, (q_1 + q_2)^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \quad (3.70) \\ = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \frac{1}{[p^2 - m_0^2] [(p + q_1)^2 - m_1^2] [(p + q_1 + q_2)^2 - m_2^2]}.$$

Требуемые нам интегралы можно записать в виде:

$$\int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \mathcal{K}_1 g^{\mu\nu} = \quad (3.71) \\ = \frac{e^2g}{(4\pi)^2 m_W} \left\{ 4m_W^2 [1 - 2m_H^2 C_0(m_H^2, 0, 0, m_W^2, m_W^2, m_W^2)] - \right. \\ \left. - [m_H^2 + 6m_W^2] B_0(m_H^2, m_W^2, m_W^2) \right\} g^{\mu\nu},$$

$$\int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \mathcal{K}_2 p^\mu p^\nu = \quad (3.72) \\ = \frac{e^2g}{(4\pi)^2 m_W} \left\{ -4m_W^2 g^{\mu\nu} + [m_H^2 g^{\mu\nu} - 2k_2^\mu k_1^\nu] \left[ 1 + \frac{6m_W^2}{m_H^2} \right] \times \right. \\ \times [1 + B_0(m_H^2, m_W^2, m_W^2) + 2m_W^2 C_0(m_H^2, 0, 0, m_W^2, m_W^2, m_W^2)] + \\ \left. + 2 \left[ 1 + \frac{6m_W^2}{m_H^2} \right] [2B_0(0, m_W^2, m_W^2) - B_0(m_H^2, m_W^2, m_W^2)] k_2^\mu k_1^\nu \right\},$$

$$\int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \mathcal{K}_3 p^\mu k_1^\nu = \quad (3.73)$$

$$= \frac{e^2 g}{(4\pi)^2 4m_W^3} \left\{ 16m_W^2 \left[ 1 + \frac{6m_W^2}{m_H^2} \right] - 2 \left[ 7 + \frac{48m_W^2}{m_H^2} \right] A_0(m_W^2) - \right. \\ \left. - \left[ m_H^2 - 2m_W^2 - \frac{96m_W^4}{m_H^2} \right] B_0(m_H^2, m_W^2, m_W^2) \right\} k_2^\mu k_1^\nu,$$

$$\int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \mathcal{K}_4 k_2^\nu p^\nu = \frac{e^2 g}{(4\pi)^2 4m_W^3} \{ 16m_W^2 - 18A_0(m_W^2) + \\ + (m_H^2 + 14m_W^2) B_0(m_H^2, m_W^2, m_W^2) \} k_2^\mu k_1^\nu, \quad (3.74)$$

$$\int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} \mathcal{K}_5 k_2^\mu k_1^\nu = \frac{4e^2 g}{(4\pi)^2 m_W} \{ B_0(0, m_W^2, m_W^2) + \\ + 4m_W^2 C_0(m_H^2, 0, 0, m_W^2, m_W^2, m_W^2) \} k_2^\mu k_1^\nu. \quad (3.75)$$

Используя соотношение

$$B_0(0, x, x) = \frac{A_0(x)}{x} - 1, \quad (3.76)$$

получим для амплитуды распада:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2 g}{(4\pi)^2 m_W} (m_H^2 g^{\mu\nu} - 2k_2^\mu k_1^\nu) \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{6m_W^2}{m_H^2} - 6m_W^2 \left[ 1 - \frac{2m_W^2}{m_H^2} \right] C_0(m_H^2, 0, 0, m_W^2, m_W^2, m_W^2) \right\}. \quad (3.77)$$

Скалярная функция  $C_0$  от подобного набора аргументов хорошо известна:

$$C_0(m_H^2, 0, 0, m_W^2, m_W^2, m_W^2) = -\frac{2}{m_H^2} f(\beta_W), \quad (3.78)$$

где  $\beta_W = 4m_W^2/m_H^2$  и была использована вспомогательная функция (3.58).

Окончательный результат для вклада в амплитуду  $W$ -бозона имеет вид:

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha g}{4\pi m_W} [2 + 3\beta_W + 3\beta_W (2 - \beta_W) f(\beta_W)] \times \\ \times [(k_1 k_2) g^{\mu\nu} - k_2^\mu k_1^\nu] \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2), \quad (3.79)$$

где  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры. Функция, зависящая от  $\beta_W$ , в точности совпадает с  $F_W(\beta_W)$ , приведенной в (3.56). Более громоздкие расчеты этой амплитуды в произвольной  $R_\xi$ -калибровке были выполнены Марчиано, Жангои и Вилленброком только в 2012 г. и подтверждают приведенный здесь результат, как, впрочем, и результат Шифмана, Волошина, Вайнштейна и Захарова, полученный в фейнмановской калибровке в 1979 г.

Прежде чем перейти к вычислению вероятности распада, обсудим свойства полученных функций  $F_f(\beta)$  и  $F_W(\beta)$ . Первое отличие состоит в том, что в пределе  $\beta \rightarrow 0$  эти функции ведут себя по-разному, а именно  $F_f(0) = 0$  и  $F_W(0) = 2$ . Обращение в нуль фермионной функции при  $\beta \rightarrow 0$  есть отражение эффекта «декаплинга», т. е. безмассовый фермион перестает взаимодействовать с хиггсовским бозоном, поскольку юкавская константа его взаимодействия пропорциональна массе и зануляется в рассматриваемом пределе. Отличный от нуля предел второй функции получился из-за наличия у  $W$ -бозона продольной компоненты, взаимодействие которой с хиггсовским бозоном не исчезает при стремлении массы  $W$ -бозона к нулю в отличие от поперечных компонент. Причина в том, что в унитарной калибровке продольная компонента  $W$ -бозона появляется в результате спонтанного нарушения симметрии, причем этой степенью свободы становится электрически заряженная компонента дублета скалярных полей. В случае безмассового  $W$ -бозона это поле будет проявляться как голдстоуновский бозон, взаимодействующий как с фотоном, так и с хиггсовским бозоном, а следовательно, дающий ненулевой вклад в петлевую диаграмму.

В другом предельном случае  $\beta \rightarrow \infty$  фермионная и бозонная функции имеют пределы:  $F_f(\beta) \rightarrow -4/3$  и  $F_W(\beta) \rightarrow 7$ . Интересно, что вклады тяжелых кварков и бозонов не зависят от масс этих частиц, т. е. этот распад хиггсовского бозона является своеобразным счетчиком числа тяжелых частиц, причем настолько тяжелых, что они не могут быть рождены даже на ускорителях будущего.

Вычисляя стандартными методами вероятность двухчастич-



ного распада  $H \rightarrow 2\gamma$ , получим следующее выражение:

$$\Gamma(H \rightarrow 2\gamma) = \frac{\sqrt{2}G_F\alpha^2 m_H^3}{256\pi^3} |\mathcal{F}|^2. \quad (3.80)$$

Выражение (3.80) позволяет не только проверить предсказания Стандартной модели, но и протестировать возможные эффекты «новой физики», которые могут происходить от вкладов дополнительных тяжелых скалярных, спинорных и векторных частиц в петлевые диаграммы, а значит, модифицировать константу  $\mathcal{F}$  и значение вероятности распада (3.80).

Перейдем к численным оценкам вероятности распада. Масса недавно обнаруженного хиггсовского бозона уже измерена достаточно точно и равна  $m_H = 125.7 \pm 0.4$  ГэВ. В рамках Стандартной модели основной вклад в константу  $\mathcal{F}$  дают  $W$ -бозон и  $t$ -кварк с массами  $m_W = 80.4$  ГэВ и  $m_t = 173.2$  ГэВ соответственно. Из других заряженных фундаментальных частиц только  $c$ - и  $b$ -кварки и  $\tau$ -лептон с массами  $m_c(m_c) = 1.275$  ГэВ,  $m_b(m_b) = 4.18$  ГэВ и  $m_\tau = 1.777$  ГэВ дают небольшие поправки к основному вкладу. С учетом вкладов всех этих частиц константа  $\mathcal{F} = 6.58 - 0.07i$ , а квадрат ее модуля  $|\mathcal{F}|^2 = 43.3$ . Подставив константу Ферми  $G_F = 1.1664 \times 10^{-5}$  ГэВ<sup>-2</sup> и постоянную токовой структуры  $\alpha(m_H) = 1/127$  на масштабе массы  $H$ -бозона, получим следующее значение для вероятности распада:

$$\Gamma_{\text{th}}(H \rightarrow 2\gamma) = 11.1 \text{ кэВ}. \quad (3.81)$$

В эксперименте на Большом адронном коллайдере коллаборация ATLAS получила, сравнив предсказываемое теорией значение с полученным сигналом, следующую оценку для рассматриваемого распада:

$$\kappa_\gamma \equiv \frac{\Gamma_{\text{exp}}(H \rightarrow 2\gamma)}{\Gamma_{\text{th}}(H \rightarrow 2\gamma)} = 1.20 \pm 0.15, \quad (3.82)$$

так что имеется согласие теории и эксперимента на уровне, превосходящем два стандартных отклонения.

Представляет интерес оценить возможность существования следующего, более тяжелого, поколения фермионов с такими же свойствами, как и три стандартные. Наличие такого поколения означает, что должны существовать один заряженный тяжелый

лептон  $\tau'$  и пара тяжелых кварков  $b'$  и  $t'$ . Предположив, что массы новых частиц существенно превосходят массу  $t$ -кварка, получим вещественную добавку в константу распада, которая станет равной  $\mathcal{F}_{4G} = 3.02 - 0.07i$ , и вероятность распада уменьшится примерно в раз:

$$\Gamma_{\text{th}}(H \rightarrow 2\gamma) = 2.34 \text{ кэВ}. \quad (3.83)$$

Более того, наличие пятого последующего поколения фермионов сделает двухфотонный распад хиггсовского бозона практически ненаблюдаемым на имеющейся статистике событий. Хорошее согласие эксперимента с теорией указывает на то, что более тяжелые поколения фундаментальных фермионов (как четвертое, так и пятое) с большой долей вероятности отсутствуют.

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Вычислить однопетлевой вклад в поляризационный оператор фотона, обусловленный слабым взаимодействием.
2. Вычислить радиационные поправки к массе массивного нейтрино.
3. Вычислить радиационные поправки к массе Хиггсовского бозона.
4. Вычислить вероятность распада  $H \rightarrow Z\gamma$  и сравнить с вероятностью дважды радиационного распада Хиггса.

## Литература

1. Берестецкий, В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. — М.: Наука, 1981.
3. Боголюбов, Н. Н. Квантовые поля / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
4. Боголюбов, Н. Н. Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. — М.: Наука, 1984.
5. Бьеркен, Дж. Д. Релятивистская квантовая теория: в 2 т. / Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл. — М.: Мир, 1978.
6. Окунь, Л. Б. Лептоны и кварки / Л. Б. Окунь. — М.: ЛКИ, 2013.
7. Пескин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
8. Ициксон, К. Квантовая теория поля: в 2 т. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. — М.: Мир, 1984.
9. Высоцкий, М. И. Лекции по теории электрослабых взаимодействий / М. И. Высоцкий. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
10. Михеев, Н. В. Методы вычислений электромагнитных и слабых процессов в квантовой теории поля / Н. В. Михеев. — Ярославль: ЯрГУ, 1998.
11. Михеев, Н. В. Лабораторные задания по курсу «Радиационные поправки и перенормировки в квантовой электродинамике» / Н. В. Михеев. — Ярославль: ЯрГУ, 1990.
12. Grozin, A. Lectures on QED and QCD: Practical Calculation and Renormalization of One- and Multi-Loop Feynman Diagrams / A. Grozin. — Singapore: World Scientific, 2007.
13. Olive, K. A. The Review of Particle Physics / K. A. Olive [et al.] // Particle Data Group. 2014. V. C38. P. 090001.

## Оглавление

Предисловие .....	3
1. Введение .....	5
2. Точные пропагаторы и вершинные функции .....	29
3. Радиационные поправки .....	58
4. Электрослабые процессы .....	71
Литература .....	99

---

Учебное издание

**Добрынина** Александра Алексеевна  
**Нарынская** Елена Николаевна

**Радиационные поправки и теория перенормировок**

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова

Компьютерная верстка А. А. Добрынина, Е. Н. Нарынская

Подписано в печать 02.11.2015.

Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 5,8 Уч.-изд. л. 5,0

Тираж 50 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском  
отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.  
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.