Министерство образования и науки Российской Федерации

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. Д. Смирнов

Введение в теорию групп Ли

Учебное пособие

Рекомендовано Научно-методическим советом университета для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению Физика

Ярославль
ЯрГУ
2014

УДК 512.54(025)
ББК В.148.2я73
С50

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2014 года

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета;
А. Б. Капранова, д-р физ.-мат. наук

Смирнов, Александр Дмитриевич.
С 50 Введение в теорию групп Ли : учебное пособие / А. Д. Смирнов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2014. – 92 с.

ISBN 978-5-8397-0996-6

Излагаются основные результаты теории групп Ли, наиболее широко используемые в квантовой теории поля и элементарных частиц и в других разделах теоретической физики.

Вводятся основные понятия теории групп Ли и алгебр Ли, обсуждается связь между группой Ли и ее алгеброй, определяется структура компактной алгебры и соответствующей ей компактной группы Ли, приводится классификация простых компактных алгебр и групп Ли, исследуются общие свойства генераторов простых компактных групп Ли, дается обзор классических групп Ли и свойств соответствующих им унитарных, ортогональных и симплектических матриц и генераторов, конечные результаты представляются в форме и обозначениях, принятых в теоретической физике.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению 03.04.08 (011200.68) Физика (дисциплина «Теория групп Ли», цикл М1), очной формы обучения.

Библиогр.: 6 назв.

ISBN 978-5-8397-0996-6

Оглавление

Предисловие

В теоретической физике на протяжении всего периода ее развития методы теории групп находят успешное применение при проведении исследований.

Особенно важную роль групповые методы играют в квантовой теории поля и физике элементарных частиц, где принципы симметрии имеют первостепенное значение. Здесь задание исходной группы симметрии в значительной степени определяет физику описываемых явлений. Достаточно напомнить, что предсказания кварков, глюонов, $W^{\pm}$-, Z^0- бозонов и H-бозона Хиггса были основаны на определенных группах симметрии и в настоящее время имеют блестящие экспериментальные подтверждения. Современные теоретические исследования фундаментальных взаимодействий в основе своей исходят из предположения о существовании в природе определенных симметрий, описываемых некоторыми группами Ли, с последующим анализом физических следствий этих симметрий и экспериментальными поисками их возможных проявлений. Имеющиеся успехи дают основания полагать, что и в будущем групповые методы будут играть важную роль в теоретической физике.

В этой связи изучение основ теории групп Ли является важным элементом подготовки современного физика-теоретика. При этом есть потребность в учебном пособии, которое давало бы возможность начинающему физику-теоретику сравнительно быстро освоить те результаты и методы теории групп Ли, которые наиболее необходимы для изучения теоретической физики, в частности современной квантовой теории поля и физики элементарных частиц.

В настоящем пособии излагаются основные результаты теории групп Ли, наиболее широко используемые в квантовой теории поля и элементарных частиц и в других разделах теоретической физики. Для пособия характерны тщательный отбор материала, представление конечных результатов в форме и обозначениях, принятых в теоретической физике, что облегчает их дальнейшее использование в физических приложениях.

Вводятся основные понятия теории групп Ли, используется экспоненциальная форма элементов группы Ли и соответствующих им матриц линейного представления группы, прослеживается связь между структурными константами группы Ли и законом умножения в ней с использованием уравнений Маурера – Картана, вводится понятие инвариантного интегрирования в группе Ли, рассматриваются группы Ли преобразований и связанные с ними понятия.

Вводятся основные определения и понятия теории алгебр Ли в их связи с соответствующимм понятиями теории групп Ли, рассматриваются инвариантная билинейная форма в алгебре Ли и ее свойства в простой и компактной алгебрах Ли, с использованием инвариантной билинейной формы устанавливается общая структура компактной алгебры и сответствующей ей компактной группы Ли. Приводится результат классификации простых компактных алгебр и групп Ли и исследуются общие свойства генераторов простых компактных групп Ли.

Дается обзор классических групп Ли и свойств соответствующих им унитарных, ортогональных и симплектических матриц и генераторов, более подробно рассмотрены свойства унитарных матриц.

Теоретический материал дополнен приложением с задачами и упражнениями, способствующими усвоению материала или частично дополняющими его.

Пособие написано на основе лекционного спецкурса «Теория групп Ли», читаемого студентам, обучающимся в магистратуре по направлению «Физика» по магистерским программам «Теоретическая физика» и «Релятивистская астрофизика», и предназначено для студентов, специализирующихся по теоретической физике и изучающих квантовую теорию, теорию элементарных частиц и ее применения в астрофизике.

Глава I

Группы Ли

1.1. Определение группы Ли и основные понятия

Как известно, группой G называется множество элементов, в котором введена бинарная операция группового умножения, определяющая для каждой пары элементов этого множества $g_1 \in G, g_2 \in G$ их произведение $g_1 g_2$ со следующими свойствами:

1) замкнутость группового умножения

$$g_1 g_2 = g_3 \in G, \tag{1.1.1}$$

2) существование в G единичного элемента e, такого что для любого $g \in G$ имеет место равенство

$$eg = ge = g, \tag{1.1.2}$$

3) существование в G для каждого элемента $g \in G$, обратного к нему элемента $g^{-1} \in G$, такого что

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e, \tag{1.1.3}$$

4) ассоциативность группового умножения

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3) \tag{1.1.4}$$

любых трех элементов: $g_1 \in G, g_2 \in G, g_3 \in G$.

Группа G называется группой Ли, если каждый ее элемент $g \in G$ определяется значениями p независимых вещественных параметров $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p$, непрерывно изменяющихся в некоторой области определения R:

$$g = g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) \equiv g(\alpha).$$

Максимальное число независимых вещественных параметров p, необходимых для задания произвольного элемента группы Ли, называется порядком группы Ли.

Перечисленные выше свойства группового умножения в случае группы Ли можно представить в следующем виде:

1. Замкнутость группового умножения

$$g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p)\, g(\beta^1, \beta^2, ..., \beta^p) = g(\gamma^1, \gamma^2, ..., \gamma^p), \qquad (1.1.5)$$

или в краткой записи

$$g(\alpha)\, g(\beta) = g(\gamma), \qquad (1.1.6)$$

где параметры произведения являются непрерывными функциями параметров сомножителей:

$$\gamma^i = \varphi^i(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p; \beta^1, \beta^2, ..., \beta^p) \equiv \varphi^i(\alpha, \beta),\ i = 1, 2, ..., p. \quad (1.1.7)$$

2. Существование единичного элемента $e = g(\alpha_0^1, \alpha_0^2, ..., \alpha_0^p)$ при некоторых значениях параметров $\alpha_0^1, \alpha_0^2, ..., \alpha_0^p$. Без потери общности значения каждого из параметров единичного элемента можно принять равными нулю, т. е. считать , что $e = g(0, 0, ..., 0) \equiv g(0)$. Тогда условие (1.1.2) примет вид

$$g(0)\, g(\alpha) = g(\alpha)\, g(0) = g(\alpha). \qquad (1.1.8)$$

Условие (1.1.8) для функций (1.1.7) означает, что

$$\varphi^i(0, 0, ..., 0; \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) = \varphi^i(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p; 0, 0, ..., 0) = \alpha^i. (1.1.9)$$

3. Существование для каждого элемента $g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) \equiv g(\alpha)$ обратного к нему элемента $(g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p))^{-1} \equiv g(\bar\alpha^1, \bar\alpha^2, ..., \bar\alpha^p) \equiv g(\bar\alpha)$ с параметрами $\bar\alpha^1, \bar\alpha^2, ..., \bar\alpha^p$, такого что

$$g(\bar\alpha)\, g(\alpha) = g(\alpha)\, g(\bar\alpha) = e. \qquad (1.1.10)$$

Условие (1.1.10) дает систему уравнений

$$\varphi^i(\bar\alpha^1, \bar\alpha^2, ..., \bar\alpha^p; \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) =$$
$$= \varphi^i(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p; \bar\alpha^1, \bar\alpha^2, ..., \bar\alpha^p) = 0,\ i = 1, 2, ..., p \qquad (1.1.11)$$

для нахождения параметров $\bar{\alpha}^i$ обратного элемента $(g(\alpha))^{-1} \equiv g(\bar{\alpha})$ как функций $\bar{\alpha}^i = \bar{\alpha}^i(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) \equiv \bar{\alpha}^i(\alpha)$ параметров исходного элемента $g(\alpha)$.

4. Ассоциативность группового умножения

$$g(\alpha)\,(g(\beta)\,g(\gamma)) = (g(\alpha)\,g(\beta))\,g(\gamma) \tag{1.1.12}$$

означает, что функции $\varphi^i(\alpha, \beta)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi^i(\alpha, \varphi(\beta, \gamma)) = \varphi^i(\varphi(\alpha, \beta), \gamma),\ i = 1, 2, ..., p \tag{1.1.13}$$

тождественно по переменным α, β, γ во всей области их определения.

Группа Ли G называется компактной, если область ее параметров R ограничена и включает в себя предельные значения параметров, и некомпактной – в противном случае.

Группа Ли G называется связной, если любые два ее элемента могут быть переведены друг в друга непрерывным изменением своих параметров в области R.

Группа Ли G называется односвязной, если любой замкнутый путь в ней может быть непрерывным образом стянут в точку.

Группа Ли G называется двусвязной, если в ней есть два замкнутых пути, которые не могут быть непрерывным образом переведены друг в друга.

Группа Ли G называется n-связной, если в ней есть n замкнутых путей, которые не могут быть непрерывным образом переведены друг в друга.

1.2. Примеры групп Ли, используемых в физике

Перечислим в качестве примеров некоторые группы Ли, используемые в физике.

1. Группа вращений в плоскости x^1, x^2, которые можно представить в виде

$$x \to x' = R(\varphi)x, \tag{1.2.14}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

– двухкомпонентный вектор, а

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1.2.16}$$

– матрица поворота на угол φ, $-2\pi \le \varphi \le 2\pi$.

Преобразования (1.2.14), (1.2.16) оставляют инвариантным скалярное произведение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = inv.. \tag{1.2.17}$$

2. Группа $SO(3)$ вращений в трехмерном пространстве, которые можно представить в виде

$$x^i \to x'^i \ = \ g^i_{\ k} x^k, \tag{1.2.18}$$

где x^i, $i = 1, 2, 3$ – координаты точки трехмерного пространства, а g – матрица трехмерных вращенией, которая может быть запараметризована тремя углами, например углами Эйлера φ, θ, ψ, $g = g(\varphi, \theta, \psi)$.

Преобразования (1.2.18) оставляют инвариантным скалярное произведение

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = inv.. \tag{1.2.19}$$

3. Группа преобразований Лоренца вдоль оси x^1

$$x \to x' = \Lambda(\alpha)x, \tag{1.2.20}$$

двумерного вектора

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.21}$$

где $x^0 = ct$ – временная координата, оставляющих инвариантным выражение

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = inv.. \tag{1.2.22}$$

Матрица $\Lambda(\alpha)$ в (1.2.20) может быть представлена в виде

$$\Lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}, \tag{1.2.23}$$

где α –параметр гиперболического преобразования, $-\infty < \alpha < +\infty$.

После замены параметра α на параметр V с помощью соотношения $\operatorname{th}\alpha = V/c$, где c – скорость света, матрица (1.2.23) принимает вид

$$\Lambda(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ \frac{-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{pmatrix}, \tag{1.2.24}$$

где V – скорость одной системы отсчета относительно другой, $-c < V < +c$.

Отметим, что преобразования Лоренца (1.2.20), (1.2.23), (1.2.24), в отличие от вращений (1.2.14), (1.2.16), некомпактны.

4. Группа Лоренца Λ преобразований

$$x^\mu \to x'^{\,\mu} \;=\; \Lambda^\mu_{\;\nu}\, x^\nu \tag{1.2.25}$$

координат x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ четырехмерного пространства–времени, оставляющих инвариантным четырехмерный квадрат вектора вида

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = inv.. \tag{1.2.26}$$

Инвариантность относительно преобразований (1.2.25) отражает свойство релятивистской инвариантности физических процессов и геометрическое свойство изотропности четырехмерного пространства–времени.

5. Группа Пуанкаре преобразований

$$x^\mu \to x'^{\,\mu} \;=\; \Lambda^\mu_{\;\nu}\, x^\nu + a^\mu, \tag{1.2.27}$$

состоящая из преобразований группы Лоренца Λ и трансляций на четырехмерный вектор a^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Инвариантность относительно преобразований (1.2.27) отражает свойства изотропности и однородности четырехмерного пространства–времени.

6. Группа конформных преобразований четырехмерного пространства–времени

$$x^\mu \to x'^{\,\mu} \;=\; \lambda\,\frac{x^\mu + \alpha^\mu x^2}{1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2}, \tag{1.2.28}$$

где λ – параметр масштабного преобразования, а α^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ – 4–вектор параметров специальных конформных преобразований. При преобразованиях (1.2.28) четырехмерный квадрат элемента длины ds^2 преобразуется как

$$ds^2 \to ds'^2 \; = \; \frac{\lambda^2}{[1 + 2(\alpha x) + \alpha^2 x^2]^2} \, ds^2. \tag{1.2.29}$$

Группа преобразований (1.2.28) является группой точной симметрии релятивистских полевых уравнений для безмассовых частиц, а также может выступать в качестве группы приближенной симметрии при описании процессов столкновений массивных элементарных частиц в пределе больших энергий, значительно превышающих массы частиц, участвующих в этих процессах.

Приведенные выше группы описывают геометрические свойства пространства–времени, и соответствующие симметрии принято называть геометрическими симметриями. Однако симметрии в физике не исчерпываются только геометрическими. Имеется значительное число симметрий, индуцируемых не геометрией пространства–времени, а спецификой взаимодействия частиц или полей. Такие симметрии обычно называют внутренними или динамическими симметриями.

Приведем примеры групп внутренних симметрий, проявляющих себя в физике фундаментальных взаимодействий.

7. Группа $SU(2)$ изотопической инвариантности ядерных взаимодействий относительно преобразований

$$N \to N' = U \, N, \tag{1.2.30}$$

где

$$N = \left(\begin{array}{c} N^1 \\ N^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \psi_p \\ \psi_n \end{array} \right), \tag{1.2.31}$$

ψ_p , ψ_n – волновые функции протона и нейтрона, а U – $2{\times}2$-унитарная матрица с $det \, U = 1$. $SU(2)$-изотопическая инвариантность проявляется не только в физике нуклонов, но и в физике всех остальных адронов.

8. Группа $SU_f(3)$-симметрии адронов относительно ароматовых преобразований, которые для предсказанных данной симметрией кварков имеют вид

$$q^{\,i} \to q^{\,\prime\, i} = U^{f}_{ik}\, q^{\,k}, \tag{1.2.32}$$

где $q^{\,i}$ – волновая функция i-го кварка, ароматовый индекс $i = 1, 2, 3$ нумерует u -, d -, s - кварки соответственно, а U^f – 3×3-унитарная матрица с $det\, U = 1$. $SU_f(3)$-симметрия является нарушенной и приводит к расщеплению масс адронов внутри $SU_f(3)$-мультиплетов. Симметрия группы $SU_f(3)$ может быть естественно расширена до группы $SU_f(n_f)$, учитывающей кварки q^i, $i = 1, 2, ..., n_f$ всех известных к настоящему времени $n_f = 6$ ароматов.

9. Группа $SU_c(3)$-цветовой симметрии кварков относительно преобразований

$$q^{\;i}_{\,\alpha} \to q^{\prime i}_{\,\alpha} = U^{\,c}_{\alpha\beta}\; q^{k}_{\beta}, \tag{1.2.33}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – цветовые индексы кварков, а $U^{\,c}$ – 3×3-унитарная матрица цветовых преобразований с $det\, U = 1$. Группа $SU_c(3)$ является группой точной калибровочной (т. е. с параметрами преобразований (1.2.33), произвольно зависящими от координат точки четырехмерного пространства–времени) симметрии.

10. Группа $G_{EW} = SU_L(2) \times U(1)$-калибровочной симметрии электрослабого взаимодействия, в которой левые (правые) кварки и лептоны являются дублетами (синглетами) группы $SU_L(2)$ с подходящими $U(1)$-гиперзарядами. Группа G_{EW} спонтанно нарушена с помощью хиггсовского механизма нарушения симметрии.

11. Группа $G_{SM} = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U(1)$-калибровочной симметрии стандартной модели (СМ) электрослабого и сильного взаимодействий кварков и лептонов. Группа G_{SM} предсказывает существование фотона, восьми безмассовых глюонов, массивных $W^{\pm}$-, Z^0-бозонов и H-бозона Хиггса. Предсказания СМ подтверждаются экспериментально, и группа G_{SM} находится в основе современной теории электрослабого и сильного взаимодействий.

12. Группа $GL(n, C)$ общих линейных преобразований

$$x^i \to x^{\prime\, i} \;=\; L^{i}{}_{k}\, x^k \tag{1.2.34}$$

координат x^i, $i = 1, 2, ..., n$ комплексного векторного пространства при $det\, L \neq 0$.

13. Группа $SL(n, C)$ специальных (т. е. при $det\, L = 1$) линейных преобразований вида (1.2.34).

14. Группа $SU(n)$ унитарных $n \times n$ - матриц U с $det\, U = 1$.

15. Группа $SO(n, R)$ вещественных ортогональных $n \times n$ - матриц O с $det\, O = 1$.

16. Группа $Sp(n)$ симплектических $n \times n$ - матриц при четном n.

1.3. Однопараметрические подгруппы и генераторы. Экспоненцирование

Важными в теории групп Ли являются понятия однопараметрических подгрупп и соответствующих им генераторов. Рассмотрим в группе Ли G однопараматрическое подмножество элементов вида

$$g(\alpha^1(t), \alpha^2(t), ..., \alpha^p(t)) \equiv g(\alpha(t)) \equiv g(t), \qquad (1.3.35)$$

параметры которых являются функциями одного вещественного параметра t:

$$\alpha^i = \alpha^i(t), \quad \alpha^i(0) = 0, \quad i = 1, 2, ..., p. \qquad (1.3.36)$$

Геометрически группу Ли G можно представить как p - мерное пространство с координатами α^i, $\quad i = 1, 2, ..., p$ (групповое пространство). Тогда каждый элемент группы изображается точкой в этом пространстве, а множество элементов (1.3.35), (1.3.36) образует кривую в этом пространстве, проходящую через начало координат (единичный элемент e).

Множество элементов (1.3.35), (1.3.36) будет называться однопараметрической подгруппой, если для любых двух элементов этого множества $g(t_1)$ и $g(t_2)$ их произведение также принадлежит этому множеству, т. е.

$$g(t_1)\, g(t_2) = g(t_3), \qquad (1.3.37)$$

где параметр произведения t_3 является некоторой функцией

$$t_3 = \tau(t_1, t_2) \qquad (1.3.38)$$

параметров t_1 и t_2, при этом

$$\tau(t,0)=\tau(0,t)=t. \tag{1.3.39}$$

Параметр t называется каноническим, если

$$\tau(t_1,t_2)=t_1+t_2, \tag{1.3.40}$$

т. е. если

$$g(t_1)\,g(t_2)=g(t_1+t_2). \tag{1.3.41}$$

Покажем, что в однопараметрической подгруппе всегда можно ввести канонический параметр. Запишем разложение функции $\tau(t,\delta t)$ при малых значениях параметра δt в ряд по δt в виде

$$\tau(t,\delta t)\approx t+u(t)\delta t+..., \tag{1.3.42}$$

где

$$u(t)=\left.\frac{\partial\tau(t,t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_2=0}. \tag{1.3.43}$$

Найдем дифференциальное уравнение, которому в общем случае должна удовлетворять функция $\tau(t_1,t_2)$. Для этого используем условие ассоциативности группового умножения (1.1.12) в однопараметрической подгруппе в виде

$$g(t_1)\,(g(t_2)\,g(t_3))=(g(t_1)\,g(t_2))\,g(t_3), \tag{1.3.44}$$

где $g(t_1),g(t_2),g(t_3)$ – три произвольных элемента однопараметрической подгруппы. Условие (1.3.44) означает, что функция $\tau(t_1,t_2)$ должна удовлетворять уравнению

$$\tau(t_1,\tau(t_2,t_3))=\tau(\tau(t_1,t_2),t_3) \tag{1.3.45}$$

тождественно по переменным t_1,t_2,t_3 во всей области их определения.

Рассмотрим уравнение (1.3.45) в случае, когда третий элемент однопараметрической подгруппы близок к единичному, в виде

$$\tau(t_1,\tau(t_2,\delta t))=\tau(\tau(t_1,t_2),\delta t). \tag{1.3.46}$$

Разлагая правую и левую части соотношения (1.3.46) по малому параметру δt, из (1.3.46) в первом порядке по δt получаем соотношение

$$\frac{\partial\tau(t_1,t_2)}{\partial t_2}\,u(t_2)=u(\tau(t_1,t_2)), \tag{1.3.47}$$

из которого следует дифференциальное уравнение для $\tau(t_1,t_2)$ как функции параметра t_2 в виде

$$\frac{\partial\tau(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\frac{u(\tau(t_1,t_2))}{u(t_2)}. \tag{1.3.48}$$

Перейдем теперь от параметра t к новому параметру t' с помощью соотношений

$$t'=f(t),\quad t=\tilde f(t'),\quad f(0)=0,\quad \tilde f(0)=0. \tag{1.3.49}$$

С помощью соотношений (1.3.49), (1.3.38) для параметра t'_3 получаем, что

$$t'_3=\tau'(t'_1,t'_2), \tag{1.3.50}$$

где функция $\tau'(t'_1,t'_2)$ определяется выражением

$$\tau'(t'_1,t'_2)=f(\tau(\tilde f(t'_1),\tilde f(t'_2))) \tag{1.3.51}$$

при

$$\tau'(t',0)=\tau'(0,t')=t'. \tag{1.3.52}$$

Записав разложение функции $\tau'(t',\delta t')$ по $\delta t'$ в виде

$$\tau'(t',\delta t')\approx t'+u'(t')\delta t'+..., \tag{1.3.53}$$

где

$$u'(t')=\left.\frac{\partial\tau'(t',t'_2)}{\partial t'_2}\right|_{t'_2=0}, \tag{1.3.54}$$

и выполняя аналогичные (1.3.45) – (1.3.48) выкладки, для функции $\tau'(t'_1,t'_2)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial\tau'(t'_1,t'_2)}{\partial t'_2}=\frac{u'(\tau'(t'_1,t'_2))}{u'(t'_2)}. \tag{1.3.55}$$

Функция (1.3.54) с помощью (1.3.51), (1.3.49), (1.3.43) может быть приведена к виду

$$u'(t') = \left[\frac{d\,f(t)}{dt}\,u(t)\right]_{t=\tilde{f}(t')} k, \tag{1.3.56}$$

где через k обозначена константа

$$k = \left.\frac{\partial \tilde{f}(t'_2)}{\partial t'_2}\right|_{t'_2=0}. \tag{1.3.57}$$

Функцию $f(t)$ перехода (1.3.49) к новому параметру t' можно выбрать удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d\,f(t)}{dt}\,u(t)\,k = 1. \tag{1.3.58}$$

При условии (1.3.58) функция (1.3.56) становится константой, равной единице:

$$u'(t') = 1, \tag{1.3.59}$$

и уравнение (1.3.55) принимает простой вид

$$\frac{\partial \tau'(t'_1, t'_2)}{\partial t'_2} = 1. \tag{1.3.60}$$

Решение уравнения (1.3.60) с учетом условия (1.3.52) имеет вид

$$\tau'(t'_1, t'_2) = t'_1 + t'_2, \tag{1.3.61}$$

т. е. параметр t', определяемый согласно (1.3.49) функцией $f(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1.3.58), является каноническим.

Таким образом, мы показали, что в однопараметрической подгруппе всегда можно ввести канонический параметр.

Канонические параметры наиболее удобны для описания элементов группы Ли и будут широко использоваться в дальнейшем изложении.

Рассмотрим элемент $g(\delta t)$ однопараметрической подгруппы, близкий к единичному элементу (δt – малый параметр), и разложим его в ряд по малому параметру δt в виде

$$g(\delta t) = g(0) + \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} \delta t + ... = e + a\,\delta t + ..., \tag{1.3.62}$$

где

$$a = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \qquad (1.3.63)$$

называется генератором однопараметрической подгруппы, соответствующий параметру t.

В случае канонического параметра t соответствующий ему генератор (1.3.63) определяет и конечный элемент однопараметрической подгруппы. Действительно, запишем равенство (1.3.41) для случая, когда второй сомножитель близок к единичному элементу, в виде

$$g(t)\, g(\delta t) = g(t + \delta t). \qquad (1.3.64)$$

Разлагая правую часть равенства (1.3.64) в ряд по δt и используя разложение (1.3.62), из членов первого порядка по δt равенства (1.3.64) получаем дифференциальное уравнение для $g(t)$ в виде

$$\frac{dg(t)}{dt} = g(t)\, a\,. \qquad (1.3.65)$$

Решение уравнения (1.3.65), как легко проверить, может быть представлено в виде ряда

$$g(t) = e + ta + \frac{t^2 a^2}{2!} + \frac{t^3 a^3}{3!} + ... \equiv e^{ta}. \qquad (1.3.66)$$

Таким образом, конечный элемент однопараметрической подгруппы $g(t)$ определяется значением канонического параметра t и соответствующим ему генератором a в виде экспоненты (1.3.66).

Используя (1.3.35) и (1.3.63), генератор a однопараметрической подгруппы $g(t)$ можно представить в виде

$$a = \xi^i a_i, \qquad (1.3.67)$$

где

$$\xi^i = \left. \frac{d\alpha^i(t)}{dt} \right|_{t=0} \qquad (1.3.68)$$

– вещественные числа, а

$$a_i = \left. \frac{\partial g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p)}{\partial \alpha^i} \right|_{\alpha^1 = \alpha^2 = ... = \alpha^p = 0} \qquad (1.3.69)$$

называются генераторами группы Ли. В (1.3.67) и далее по повторяющимся верхним и нижним индексам подразумевается суммирование.

Из (1.3.66) и (1.3.67) получаем, что

$$g(t) = e^{t\,\xi^i a_i}. \tag{1.3.70}$$

Определяя для элемента (1.3.70) его новые параметры в виде

$$\alpha^i = t\,\xi^i, \quad i = 1, 2, ..., p, \tag{1.3.71}$$

конечный элемент (1.3.70) группы G можно представить в виде

$$g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) = e^{\alpha^i\,a_i}. \tag{1.3.72}$$

Параметры (1.3.71) являются независимыми, и каждый из них, как легко видеть, является каноническим. Представление конечного элемента $g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p)$ группы G как функции его канонических параметров $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p$ и соответствующих им генераторов в виде экспоненты (1.3.72) широко используется в физических приложениях.

1.4. Коммутатор генераторов и структурные константы группы Ли

Генераторы a_i, $\;i = 1, 2, ..., p$ группы Ли удовлетворяют определенным соотношениям. Для получения этих соотношений рассмотрим элемент группы Ли вида

$$e^a\, e^b\, e^{-a}\, e^{-b} \equiv e^c, \tag{1.4.73}$$

где

$$a = \alpha^i\, a_i, \quad b = \beta^i\, a_i \quad c = \gamma^i\, a_i, \tag{1.4.74}$$

α^i, β^i, γ^i – параметры рассматриваемых элементов группы.

Будем считать параметры α^i, β^i малыми (при этом параметры γ^i будут также малыми) и разложим левую часть равенства (1.4.73) в ряд по этим параметрам до первого после единичного элемента неисчезаюшего члена (для этого в разложении сомножителей нужно удерживать члены до второго порядка малости включительно). В результате необходимых выкладок получаем, что

$$\begin{aligned} e^a\, e^b\, e^{-a}\, e^{-b} &\approx e + ab - ba + \ldots = \\ &= e + \alpha^i \beta^j (a_i a_j - a_j a_i) + \ldots\,. \end{aligned} \tag{1.4.75}$$

Аналогичное разложение правой части равенства (1.4.73) имеет вид

$$e^c \approx e + c + \ldots = e + \gamma^k\, a_k + \ldots\,. \tag{1.4.76}$$

Из сравнения (1.4.75) и (1.4.76) следует, что коммутатор генераторов в (1.4.75) должен быть некоторой линейной комбинацией генераторов, т. е.

$$[a_i, a_j] = c_{ij}^k\, a_k, \tag{1.4.77}$$

где константы c_{ij}^k называются структурными константами группы Ли G (здесь и далее для коммутатора мы используем обозначение $ab - ba = [a, b]$), при этом малые параметры элемента (1.4.73) имеют второй порядок малости и в этом приближении равны

$$\gamma^k \approx c_{ij}^k\, \alpha^i \beta^j + \ldots\,. \tag{1.4.78}$$

Структурные константы группы Ли играют важную роль в теории групп Ли и ее приложениях.

1.5. Построение группы Ли по ее структурным константам. Уравнения Маурера – Картана

Структурные константы группы Ли, вводимые при рассмотрении элементов группы, близких к единичному, и нахождении коммутатора генераторов группы, как оказывается, определяют закон умножения конечных элементов группы в некоторой (необязательно малой) окрестности единичного элемента, другими словами, определяют вид функций (1.1.7) $\varphi^i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, задающих закон умножения в группе Ли.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим сначала функции $\varphi^i(\alpha, \delta\beta)$ при малых значениях параметров $\delta\beta$ и их разложение в ряд по $\delta\beta$ в виде

$$\varphi^i(\alpha, \delta\beta) \approx \alpha^i + u_j^i(\alpha)\, \delta\beta^j + \ldots\,, \tag{1.5.79}$$

где

$$u^i_j(\alpha) = \frac{\partial \varphi^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^j}\bigg|_{\beta^1=\beta^2=...=\beta^p=0}. \qquad (1.5.80)$$

Определим матрицу $v^i_j(\alpha)$, обратную к матрице $u^i_j(\alpha)$, с помощью соотношения

$$v^i_k(\alpha) u^k_j(\alpha) = \delta^i_j. \qquad (1.5.81)$$

Матрица $u^i_j(\alpha)$ имеет обратную, т. к. $det(u^i_j(\alpha)) \neq 0$ в силу определения (1.5.80) и независимости системы функций $\varphi^i(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим теперь условие ассоциативности умножения в группе Ли (1.1.13) в случае, когда третий элемент в нем близок к единичному, в виде

$$\varphi^i(\alpha, \varphi(\beta, \delta\gamma)) = \varphi^i(\varphi(\alpha, \beta), \delta\gamma), \ i = 1, 2, ..., p. \qquad (1.5.82)$$

Разлагая правую и левую части соотношения (1.5.82) по малым параметрам $\delta\gamma$, из (1.5.82) в первом порядке по $\delta\gamma$ получаем соотношения

$$\frac{\partial \varphi^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^j} u^j_k(\beta) = u^i_k(\varphi^i(\alpha, \beta)), \qquad (1.5.83)$$

из которых после умножения на $v^k_l(\beta)$ с учетом (1.5.81) получаем систему дифференциальных уравнений для $\varphi^i(\alpha, \beta)$ как функций параметров β в виде

$$\frac{\partial \varphi^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^l} = u^i_m(\varphi(\alpha, \beta))\, v^m_l(\beta). \qquad (1.5.84)$$

Условия совместности системы уравнений (1.5.84) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial \beta^k}\left(\frac{\partial \varphi^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^l}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta^l}\left(\frac{\partial \varphi^i(\alpha, \beta)}{\partial \beta^k}\right) \equiv 0. \qquad (1.5.85)$$

Равенства (1.5.85) после подстановки в них решений системы уравнений (1.5.84) (т. е. после вычисления производных от функций $\varphi^i(\alpha, \beta)$ по переменным β с использованием уравнений (1.5.84)) должны выполняться тождественно по всем аргументам α, β.

Вычисляя входящие в (1.5.85) производные от функций $\varphi^i(\alpha,\beta)$ по переменным β и используя при этом уравнения (1.5.84)), из (1.5.85) получаем тождества вида

$$\frac{\partial u^i_m(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_r(\varphi)\Big(v^r_k(\beta)\,v^m_l(\beta)-v^r_l(\beta)\,v^m_k(\beta)\Big)+ \\ +u^i_m(\varphi)\left(\frac{\partial v^m_l(\beta)}{\partial\beta^k}-\frac{\partial v^m_k(\beta)}{\partial\beta^l}\right)\equiv 0. \qquad (1.5.86)$$

Параметры α входят в (1.5.86) только через посредство функций $\varphi^i(\alpha,\beta)$, поэтому тождественность выполнения равенств (1.5.86) по параметрам α означает тождественность их выполнения по аргументам φ.

Тождества (1.5.86) допускают разделение переменных. Домножая (1.5.86) на $v^j_i(\varphi)\,u^l_p(\beta)\,u^k_q(\beta)$ и суммируя по повторяющимся индексам, с учетом соотношений (1.5.81) из (1.5.86) получаем тождества в виде

$$\left(\frac{\partial u^i_p(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_q(\varphi)-\frac{\partial u^i_q(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_p(\varphi)\right)v^j_i(\varphi)+ \\ +\left(\frac{\partial v^j_l(\beta)}{\partial\beta^k}-\frac{\partial v^j_k(\beta)}{\partial\beta^l}\right)u^l_p(\beta)\,u^k_q(\beta)\equiv 0, \qquad (1.5.87)$$

откуда в силу независимости переменных φ и β следует, что

$$\left(\frac{\partial u^i_p(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_q(\varphi)-\frac{\partial u^i_q(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_p(\varphi)\right)v^j_i(\varphi)=-\tilde{c}^j_{pq}, \qquad (1.5.88)$$

$$\left(\frac{\partial v^j_l(\beta)}{\partial\beta^k}-\frac{\partial v^j_k(\beta)}{\partial\beta^l}\right)u^l_p(\beta)\,u^k_q(\beta)=\tilde{c}^j_{pq}, \qquad (1.5.89)$$

где $\tilde{c}^j_{pq}=-\tilde{c}^j_{qp}$ – константы разделения переменных.

Домножая (1.5.88) на $u^r_j(\varphi)$, а (1.5.89) – на $v^p_m(\beta)\,v^q_n(\beta)$, из (1.5.88), (1.5.89) с учетом (1.5.81) получаем систему дифференциальных уравнений для функций $u(\varphi)$ и $v(\beta)$) в виде

$$\frac{\partial u^r_p(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_q(\varphi)-\frac{\partial u^r_q(\varphi)}{\partial\varphi^n}\,u^n_p(\varphi)=-\tilde{c}^j_{pq}\,u^r_j(\varphi), \qquad (1.5.90)$$

$$\frac{\partial v_m^j(\beta)}{\partial \beta^n} - \frac{\partial v_n^j(\beta)}{\partial \beta^m} = \tilde{c}_{pq}^j v_m^p(\beta)\, v_n^q(\beta). \tag{1.5.91}$$

Уравнения (1.5.90), (1.5.91) называются уравнениями Маурера–Картана.

Можно показать, что входящие в (1.5.90), (1.5.91) константы $\tilde{c}_{pq}^j$ совпадают со структурными константами группы Ли, определяемыми коммутационными соотношениями (1.4.77), т. е.

$$\tilde{c}_{pq}^j = c_{pq}^j. \tag{1.5.92}$$

Действительно, из (1.5.90) при $\varphi = 0$ с учетом, что

$$u_j^i(0) = \delta_j^i, \tag{1.5.93}$$

получаем

$$\tilde{c}_{pq}^r = a_{pq}^r - a_{qp}^r, \tag{1.5.94}$$

где

$$a_{pq}^r = \left.\frac{\partial^2 \varphi^r(\alpha,\beta)}{\partial \alpha^p\, \partial \beta^q}\right|_{\substack{\alpha^1=\alpha^2=\ldots=\alpha^p=0\\ \beta^1=\beta^2=\ldots=\beta^p=0}}. \tag{1.5.95}$$

С другой стороны, вычисляя параметры элемента (1.4.73) при малых значениях входящих в него параметров, можно показать, что с точностью до второго порядка малости

$$\gamma^k = \varphi^k(\varphi(\alpha,\beta),\, \varphi(\bar{\alpha},\bar{\beta})) \approx (a_{lm}^k - a_{ml}^k)\, \alpha^l\, \beta^m + ..., \tag{1.5.96}$$

откуда при сравнениис с (1.4.78) следует, что

$$c_{lm}^k = a_{lm}^k - a_{ml}^k. \tag{1.5.97}$$

Для получения приближенного равенства в (1.5.96) необходимо воспользоваться приближенными с точностью до второго порядка малости соотношениями:

$$\varphi^i(\alpha,\beta) \approx \alpha^i + \beta^i + a_{mk}^i\, \alpha^m\, \beta^k + ...\,, \tag{1.5.98}$$

$$\alpha^i + \bar{\alpha}^i + a_{mk}^i\, \alpha^m\, \bar{\alpha}^k + ... \approx 0, \tag{1.5.99}$$

$$\bar{\alpha}^i \approx -\alpha^i + a^i_{kl}\,\alpha^k\,\alpha^l + \ldots\,. \tag{1.5.100}$$

Из (1.5.94), (1.5.97) и следует совпадение констант (1.5.92).

Уравнения (1.5.90) по заданным структурным константам и при начальных условиях (1.5.93) определяют функции (1.5.80), которые, в свою очередь, с помощью уравнений (1.5.83) и определяют функции $\varphi^i(\alpha, \beta)$, задающие закон умножения в группе Ли в некоторой связной области параметров, включающей в себя единичный элемент группы. Соответствующую область элементов группы называют локальной группой Ли.

В связи со сказанным отметим, что две группы Ли, имеющие одинаковые структурные константы, будут иметь одинаковый закон умножения в своих связных областях, включающих единичные элементы, и поэтому такие две группы называются локально изоморфными.

В заключение для иллюстрации сделанного в начале параграфа утверждения приведем (без доказательства) выражение для произведения двух элементов группы Ли непосредственно в виде экспоненты

$$e^a\,e^b = e^{c(a,\,b)}, \tag{1.5.101}$$

где элемент $c(a, b)$ представляется в виде ряда

$$c(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(a,b), \tag{1.5.102}$$

первый член которого равен

$$c_1(a,b) = a + b, \tag{1.5.103}$$

а последующие члены определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1}(a,b) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{2}\,\big[a-b, c_n(a,b)\big] +$$

$$+\sum_{p\geq 1}^{2p\leq n} \frac{B_{2p}}{(2p)!} \sum_{m_1,\ldots,m_{2p}>0}^{m_1+\ldots+m_{2p}=n} \Big[c_{m_1}(a,b), \big[\ldots, \big[c_{m_{2p}}(a,b), a+b\big]\ldots\big]\Big]\Big), \tag{1.5.104}$$

где B_{2p} – числа Бернулли.

Ряд (1.5.102), члены которого определяются формулами (1.5.103), (1.5.104), представляет собой линейную комбинацию элементов a, b и кратных коммутаторов этих элементов, так что каждый член этого ряда является линейной комбинацией генераторов группы. Коэффициенты этой линейной комбинации являются функциями канонических параметров сомножителей в (1.5.101) и определяются структурными константами группы Ли. Бесконечный ряд (1.5.102)–(1.5.104) называется рядом Кемпбелла–Хаусдорфа.

С помощью формул (1.5.103), (1.5.104) легко найти первые три члена ряда (1.5.102). Результат можно представить в виде

$$c(a,b) = a+b+\frac{1}{2}[a,b]+\frac{1}{12}\big([a,[a,b]]+[b,[b,a]]\big)+\sum_{n=4}^{\infty} c_n(a,b). \qquad (1.5.105)$$

1.6. Инвариантное интегрирование в группе Ли

В теории конечных групп часто встречаются некоторые числовые функции $f(g)$ элементов g конечной группы, при этом возникает необходимость суммирования таких функций по всем элементам группы, т. е. рассмотрения сумм вида

$$\sum_{g'} f(g'). \qquad (1.6.106)$$

Сумма (1.6.106) обладает очевидным для конечной группы свойством

$$\sum_{g'} f(gg') = \sum_{g'} f(g'g) = \sum_{g'} f(g') \qquad (1.6.107)$$

для любого фиксированного элемента g группы. Такое суммирование достаточно, в частности, для доказательства соотношений ортогональности матричных элементов неприводимых представлений конечной группы и эквивалентности ее представлений унитарным.

Обобщим процедуру суммирования по элементам конечной группы вида (1.6.106), (1.6.107) на случай групп Ли. Для этого введем понятие интеграла от числовой функции $f(g)$ от элементов $g(\alpha)$ группы Ли по всей группе в виде

$$\int f(g)\, dg \equiv \int F(\alpha)\, \rho(\alpha)\, d\alpha, \qquad (1.6.108)$$

где $F(\alpha) = F(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p)$ – функция параметров элемента $g(\alpha)$, соответствующая функции $f(g)$, $d\alpha = d\alpha^1 d\alpha^2 ... d\alpha^p$ – произведение дифференциалов параметров элемента $g(\alpha)$, $\rho(\alpha) = \rho(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p)$ – некоторая весовая функция параметров элемента $g(\alpha)$, определяющая меру в интеграле (1.6.108).

Весовую функцию $\rho(\alpha)$ можно определить так, чтобы обеспечить условие левоинвариантности

$$\int f(g_0 g)\, dg = \int f(g)\, dg \tag{1.6.109}$$

или правоинвариантности

$$\int f(g g_0)\, dg = \int f(g)\, dg \tag{1.6.110}$$

интеграла (1.6.108) при произвольном фиксированном элементе $g_0 = g(\alpha_0)$ группы Ли.

В дальнейшем для определенности мы будем использовать условие левоинвариантности (1.6.109) интеграла (1.6.108). Покажем, что подходящим выбором весовой функции $\rho(\alpha)$ можно обеспечить выполнение условия (1.6.109). Условие (1.6.109) с учетом определения интеграла (1.6.108) принимает вид

$$\int F(\varphi(\alpha_0, \alpha))\, \rho(\alpha)\, d\alpha = \int F(\alpha)\, \rho(\alpha)\, d\alpha, \tag{1.6.111}$$

где $\alpha_0 = \{\alpha_0^1, \alpha_0^2, ..., \alpha_0^p\}$ – параметры произвольного фиксированного элемента $g_0 = g(\alpha_0)$.

Переобозначив переменные интегрирования в правой части (1.6.111), перепишем соотношение (1.6.111) в виде

$$\int F(\varphi(\alpha_0, \alpha))\, \rho(\alpha)\, d\alpha = \int F(\gamma)\, \rho(\gamma)\, d\gamma. \tag{1.6.112}$$

Перейдем в (1.6.112) от переменных интегрирования γ к новым переменным α с помощью соотношений

$$\gamma^i = \varphi^i(\alpha_0, \alpha), \tag{1.6.113}$$

$$d\gamma^1 d\gamma^2 ... d\gamma^p = J(\alpha_0, \alpha)\, d\alpha^1 d\alpha^2 ... d\alpha^p, \tag{1.6.114}$$

где

$$J(\alpha_0, \alpha) = \left| det \left(\frac{\partial \varphi^i(\alpha_0, \alpha)}{\partial \alpha^j} \right) \right| \tag{1.6.115}$$

– якобиан перехода (1.6.113) от переменных γ к переменным α.

Тогда соотношение (1.6.112) перепишется в виде

$$\int F(\gamma)\, \rho(\alpha)\, d\alpha = \int F(\gamma)\, \rho(\varphi(\alpha_0, \alpha))\, J(\alpha_0, \alpha)\, d\alpha, \tag{1.6.116}$$

откуда следует уравнение для весовой функции $\rho(\alpha)$

$$\rho(\alpha) = \rho(\varphi(\alpha_0, \alpha))\, J(\alpha_0, \alpha), \tag{1.6.117}$$

которое должно выполняться тождественно по α и α_0.

При $\alpha = 0$ уравнение (1.6.117) принимает вид

$$\rho(0) = \rho(\alpha_0)\, J(\alpha_0, 0), \tag{1.6.118}$$

откуда получаем для функции $\rho(\alpha_0)$ выражение

$$\rho(\alpha_0) = \frac{\rho(0)}{J(\alpha_0, 0)} = \frac{\rho(0)}{\left| det \left(\frac{\partial \varphi^i(\alpha_0, \alpha)}{\partial \alpha^j} \right) \right|_{\alpha=0}}. \tag{1.6.119}$$

Отметим, что функция (1.6.119) является положительно определенной (нормировочный множитель $\rho(0)$ естественно выбрать положительным).

Покажем, что функция (1.6.119) удовлетворяет уравнению (1.6.117) при произвольных α и α_0. Используя (1.6.119), для правой части уравнения (1.6.117) имеем выражение

$$\rho(\varphi(\alpha_0, \alpha))\, J(\alpha_0, \alpha) = \frac{\rho(0)}{J(\varphi(\alpha_0, \alpha), 0)}\, J(\alpha_0, \alpha). \tag{1.6.120}$$

Знаменатель выражения (1.6.120) можно преобразовать следующим образом:

$$J(\varphi(\alpha_0,\alpha),0)=\left|det\left(\frac{\partial\varphi^i(\varphi(\alpha_0,\alpha),\gamma)}{\partial\gamma^j}\right)\right|_{\gamma=0}= \tag{1.6.121}$$

$$=\left|det\left(\frac{\partial\varphi^i(\alpha_0,\varphi(\alpha,\gamma))}{\partial\gamma^j}\right)\right|_{\gamma=0}= \tag{1.6.122}$$

$$=\left|det\left(\frac{\partial\varphi^i(\alpha_0,x)}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi^k(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma^j}\right)\right|_{\substack{\gamma=0\\ x=\alpha}}= \tag{1.6.123}$$

$$=\left|det\left(\frac{\partial\varphi^i(\alpha_0,x)}{\partial x^k}\right)\right|_{x=\alpha}\left|det\left(\frac{\partial\varphi^k(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma^j}\right)\right|_{\gamma=0}= \tag{1.6.124}$$

$$=\left|det\left(\frac{\partial\varphi^i(\alpha_0,\alpha)}{\partial\alpha^k}\right)\right|\left|det\left(\frac{\partial\varphi^k(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma^j}\right)\right|_{\gamma=0}= \tag{1.6.125}$$

$$=J(\alpha_0,\alpha)\,J(\alpha,0). \tag{1.6.126}$$

Отметим, что при получении выражения (1.6.122) было использовано свойство ассоциативности группового умножения (1.1.12).

После подстановки в (1.6.120) вместо якобиана $J(\varphi(\alpha_0,\alpha),0)$ его выражения (1.6.126) правая часть соотношения (1.6.120) оказывается равной

$$\frac{\rho(0)}{J(\alpha,0)}=\rho(\alpha), \tag{1.6.127}$$

т. е. функция (1.6.119) действительно является решением уравнения (1.6.117) при произвольных α и α_0.

Таким образом, в группе Ли всегда можно ввести инвариантное интегрирование согласно определению (1.6.108), (1.6.109), (1.6.111). В случае компактной группы Ли интегралы (1.6.108), (1.6.109), (1.6.111) от ограниченных функций $F(\alpha)$ являются сходящимися. Вследствие этого доказательство соотношений ортогональности матричных элементов неприводимых представлений конечной группы и эквивалентности ее представлений унитарным может быть путем замены сумм вида (1.6.106), (1.6.107) на интегралы (1.6.108), (1.6.109), (1.6.111) обобщено и на случай компактной группы Ли.

Мы показали возможность введения в группе Ли левоинвариантного интеграла (1.6.108), (1.6.109). Аналогичным образом можно показать возможность введения в группе Ли и правоинвариантного интеграла (1.6.108), (1.6.110). В теории групп Ли доказано, что в случае компактной группы Ли левоинвариантный и правоинвариантный интегралы совпадают.

1.7. Представления групп Ли. Генераторы представления группы Ли и их свойства

Как известно, линейным представлением группы называется отображение

$$g \to T_g \tag{1.7.128}$$

элементов группы в группу линейных преобразований, сохраняющее закон группового умножения:

$$g_1 \to T_{g_1}, \qquad g_2 \to T_{g_2}, \tag{1.7.129}$$

$$g_1 g_2 \to T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}. \tag{1.7.130}$$

Указанные преобразования осуществляются линейными операторами T_g, действующими в некотором линейном векторном пространстве L. При выбранном в L базисе операторы T_g описываются соответствующими им матрицами.

В случае группы Ли ее линейное представление задается отображением

$$g(\alpha) \to T_{g(\alpha)} = T(\alpha) = T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) \tag{1.7.131}$$

элементов группы $g(\alpha)$ в группу линейных операторов $T(\alpha)$, зависящих от параметров элемента $g(\alpha)$, при этом

$$g(\alpha)\, g(\beta) = g(\varphi(\alpha, \beta)) \to T_{g(\alpha) g(\beta)} = T(\varphi(\alpha, \beta)), \tag{1.7.132}$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$ – функции, задающие закон умножения в группе Ли.

При малых параметрах α операторы (1.7.131) можно разложить в ряд

$$T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) \approx I + \alpha^i A_i + ... \,, \tag{1.7.133}$$

где

$$A_i = \left. \frac{\partial T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p)}{\partial \alpha^i} \right|_{\alpha^1 = \alpha^2 = ... = \alpha^p = 0} \tag{1.7.134}$$

называются генераторами представления группы Ли.

Далее, повторяя рассуждения параграфа (1.2), можно показать, что

$$g(\alpha) = g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) = e^{\alpha^i\, a_i} \to \tag{1.7.135}$$

$$\to T_{g(\alpha)} = T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) = e^{\alpha^i\, A_i}, \tag{1.7.136}$$

где α^i – канонические параметры группы Ли.

Аналогично, рассматривая элемент группы вида

$$e^a\, e^b\, e^{-a}\, e^{-b} = e^c, \tag{1.7.137}$$

где

$$a = \alpha^i\, a_i, \quad b = \beta^i\, a_i \quad c = \gamma^i\, a_i, \tag{1.7.138}$$

α^i, β^i, γ^i – параметры рассматриваемых элементов группы, можно показать, что

$$e^a\, e^b\, e^{-a}\, e^{-b} = e^c \to e^A\, e^B\, e^{-A}\, e^{-B} = e^C, \tag{1.7.139}$$

где

$$A = \alpha^i\, A_i, \quad B = \beta^i\, A_i \quad C = \gamma^i\, A_i, \tag{1.7.140}$$

$$\begin{aligned} e^A\, e^B\, e^{-A}\, e^{-B} &\approx I + AB - BA + ... = \\ &= I + \alpha^i \beta^j (A_i A_j - A_j A_i) + ... \,. \end{aligned} \tag{1.7.141}$$

Аналогичное разложение правой части равенства (1.7.139) дает

$$e^C \approx I + C + ... = I + \gamma^k\, A_k + ... \approx I + \alpha^i \beta^j\, c^k_{ij}\, A_k + ... \,, \tag{1.7.142}$$

где было учтено приближенное равенство (1.4.78).

Из сравнения (1.7.139) и (1.7.142) получаем, что генераторы представления группы удовлетворяют аналогичным (1.4.77) коммутационным соотношениям

$$[A_i, A_j] = c^k_{ij}\, A_k, \tag{1.7.143}$$

где c^k_{ij} – структурные константы группы Ли.

Важным классом представлений группы являются унитарные представления, операторы которых удовлетворяют условию унитарности

$$\big(T(\alpha)\big)^+ T(\alpha) = T(\alpha)\,\big(T(\alpha)\big)^+ = I, \qquad (1.7.144)$$

где $\big(T(\alpha)\big)^+$ – оператор, эрмитово сопряженный к оператору $T(\alpha)$.

Используя разложение (1.7.133), из (1.7.144) легко получить, что при вещественных параметрах группы

$$\big(A_i\big)^+ = -A_i, \qquad (1.7.145)$$

т. е. соответствующие вещественным параметрам генераторы унитарных представлений группы Ли являются антиэрмитовыми операторами.

1.8. Группы Ли преобразований. Инфинитезимальные преобразования и генераторные функции

В физических приложениях часто рассматриваются преобразования некоторых физических величин, образующие ту или иную группу Ли преобразований. При этом преобразующиеся величины могут иметь самый различный физический смысл. В качестве таких величин могут выступать, например, координаты четырехмерного пространства-времени, волновые функции частиц, содержащихся в рассматриваемой теории, и т. п. Наличие симметрии относительно рассматриваемых преобразований приводит к важным физическим следствиям, таким как законы сохранения, вырождение уровней энергии квантовой системы, спектр масс частиц, правила отбора и др. В данном параграфе введем основные понятия теории групп Ли преобразований.

Будем рассматривать физические величины $x = \{x^1, x^2, ..., x^N\}$ в качестве координат некоторого N–мерного пространства. Рассмотрим в этом пространстве непрерывные преобразования вида

$$x^\mu \xrightarrow{g(\alpha)} x'^\mu = f^\mu(x^1, x^2, ..., x^N; \alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p) = f^\mu(x;\alpha), \qquad (1.8.146)$$

зависяшие от p параметров $\alpha = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p\}$, с начальными условиями

$$f^\mu(x;\alpha)\Big|_{\alpha^1=\alpha^2=...=\alpha^p=0} = x^\mu. \tag{1.8.147}$$

Пусть наряду с преобразованиями (1.8.146) имеются аналогичные преобразования с параметрами $\beta = \{\beta^1, \beta^2, ..., \beta^p\}$

$$x^\mu \xrightarrow{g(\beta)} x'^\mu = f^\mu(x;\beta) \tag{1.8.148}$$

и определим произведение двух преобразований (1.8.146), (1.8.148) как преобразование

$$x^\mu \xrightarrow{g(\alpha)g(\beta)} x'^\mu = f^\mu(f(x;\alpha);\beta) = f^\mu(x;\varphi(\alpha,\beta)), \tag{1.8.149}$$

где задающие произведение двух преобразований функции $\varphi(\alpha,\beta)$ удовлетворяют перечисленным в параграфе (1.1) групповым свойствам.

Будем говорить, что в пространстве задана группа Ли преобразований, если в нем заданы непрерывные преобразования вида (1.8.146) со свойствами (1.8.147), (1.8.148), (1.8.149).

Преобразования (1.8.146) можно представить в инфинитезимальном (т. е. при малых параметрах) виде

$$x^\mu \xrightarrow{g(\delta\alpha)} x'^\mu = f^\mu(x;\delta\alpha) \approx x^\mu + \delta\alpha^i\,\lambda_i^\mu(x) + ... , \tag{1.8.150}$$

где функции

$$\lambda_i^\mu(x) = \frac{\partial f^\mu(x;\alpha)}{\partial\alpha^i}\bigg|_{\alpha^1=\alpha^2=...=\alpha^p=0}, \ \mu = 1,2,...,N;\, i = 1,2,...,p \tag{1.8.151}$$

будем называть генераторными функциями.

Пусть $\Phi(x)$ – некоторая функция коородинат x. Введем преобразования функции $\Phi(x)$ согласно определению

$$\Phi(x) \xrightarrow{g(\alpha)} \Phi'(x) = \Phi(x') = \Phi(f(x;\alpha)) \equiv \hat{T}(\alpha)\,\Phi(x). \tag{1.8.152}$$

Преобразования (1.8.152) можно представить в инфинитезимальном виде

$$\Phi'(x) \,=\, \Phi(f(x;\delta\alpha)) = \hat{T}(\delta\alpha)\,\Phi(x) \approx \tag{1.8.153}$$

$$\approx \Phi(x) + \delta\alpha^i\,\lambda_i^\mu(x)\,\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x^\mu} + ... \,=\Phi(x) + \delta\alpha^i\,\hat{A}_i\,\Phi(x) + ... , \tag{1.8.154}$$

где
$$\hat{A}_i = \lambda_i^\mu(x)\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.8.155}$$
– инфинитезимальные операторы.

Рассматривая однопараметрическую подгруппу преобразований вида (1.8.146), параметры которых являются функциями (1.3.36) канонического параметра t, для произведения двух таких преобразований имеем равенства

$$x^\mu \xrightarrow{g(\alpha(t_1))g(\alpha(t_2))} x'^\mu = f^\mu(f(x;\alpha(t_1));\alpha(t_2)) = f^\mu(x;\alpha(t_1+t_2)), \tag{1.8.156}$$
$$\Phi(x) \xrightarrow{g(\alpha(t_1))g(\alpha(t_2))} \Phi(f(f(x;\alpha(t_1));\alpha(t_2))) = \Phi(f(x;\alpha(t_1+t_2))). \tag{1.8.157}$$

Положив в (1.8.157) $t_1 = t, t_2 = \delta t$, разложим обе части получаемого равенства по δt. Учитывая, что линейное по δt слагаемое в правой части этого равенства является приращением функции $\Phi(x')$ в произвольной точке с координатами $x'^\mu = f^\mu(x;\alpha(t))$, получаем уравнение
$$\frac{d\Phi(x')}{dt} = \xi^i \hat{A}_i \Phi(x'), \tag{1.8.158}$$
где $\hat{A}_i$ – операторы, определяемые выражением (1.8.155) при замене в нем $x^\mu \to x'^\mu$. Решение уравнения (1.8.158) можно представить в виде
$$\Phi(x';t) = e^{\alpha^i \hat{A}_i}\,\Phi(x'), \tag{1.8.159}$$
где введены канонические параметры α^i согласно формуле (1.3.71). В дальнейшем штрих в формулах (1.8.158), (1.8.159) можно опустить.

Можно показать, что дифференциальные операторы (1.8.155) удовлетворяют коммутационным соотношениям
$$\hat{A}_i\hat{A}_j - \hat{A}_j\hat{A}_i \equiv [\hat{A}_i, \hat{A}_j] = c_{ij}^k \hat{A}_k, \tag{1.8.160}$$
где c_{ij}^k – структурные константы группы Ли преобразований.

Из (1.8.160) следуют уравнения для генераторных функций:
$$\lambda_i^\nu(x)\,\frac{\partial \lambda_j^\mu(x)}{\partial x^\nu} - \lambda_j^\nu(x)\,\frac{\partial \lambda_i^\mu(x)}{\partial x^\nu} = c_{ij}^k\,\lambda_k^\mu(x). \tag{1.8.161}$$
Уравнения (1.8.161) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений для нахождения генераторных функций по заданным структурным константам группы Ли преобразований.

Глава II

Алгебры Ли

2.1. Группа Ли и ее алгебра Ли. Подалгебра, инвариантная подалгебра. Алгебры Ли простые и полупростые

Как было показано в предыдущей главе, элементы группы Ли могут быть выражены через генераторы группы a_i, например, в виде экспонент от генераторов, свернутых с соответствующими им каноническими параметрами. Как показано в параграфах (1.2), (1.3), генераторы (1.3.69) группы Ли удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j] = c_{ij}^k \, a_k, \tag{2.1.1}$$

где c_{ij}^k – структурные константы группы Ли. При этом, как это показано в параграфе (1.4), структурные константы c_{ij}^k определяют закон умножения конечных элементов группы Ли в некоторой связной области, содержащей единичный элемент группы.

Таким образом, изучение свойств группы Ли может быть сведено к изучению свойств ее генераторов, их коммутационных соотношений и соответствующих им структурных констант.

Конкретный вид генераторов зависит от выбора параметров в группе Ли. Если от параметров $\alpha = \{\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p\}$ перейти к новым параметрам $\alpha' = \{\alpha'^1, \alpha'^2, ..., \alpha'^p\}$ по формулам

$$\alpha^i = \alpha^i(\alpha'^1 = \alpha'^2 = ... = \alpha'^p) = \alpha^i(\alpha'), \tag{2.1.2}$$

то новые генераторы, определенные по отношению к новым параметрам α' как

$$a'_i = \frac{\partial g(\alpha(\alpha'))}{\partial \alpha'^i}\bigg|_{\alpha'=0}, \tag{2.1.3}$$

будут связаны с генераторами a_i линейными соотношениями

$$a'_i = \xi_i^j \, a_j, \tag{2.1.4}$$

где матрица перехода ξ_i^j определяется соотношениями (1.5.99) как

$$\xi_i^j = \left. \frac{\partial \alpha^j(\alpha')}{\partial \alpha'^i} \right|_{\alpha'=0}. \tag{2.1.5}$$

Таким образом, естественно возникает необходимость рассмотрения наряду с генераторами a_i множества A их линейных комбинаций вида $a = \xi^i \, a_i$, где ξ^i – вещественные или, для большей общности, комплексные числа. Как известно, множество, для элементов которого введены операции умножения на числа и сложение, называется линейным векторным пространством. Таким образом, генераторы a_i и их всевозможные линейные комбинации вида $a = \xi^i \, a_i$ образуют линейное векторное пространство, в котором генераторы a_i играют роль базиса.

При этом для любой пары элементов

$$a = \xi^i \, a_i, \quad b = \eta^j \, a_j, \;\; a \in A, \; b \in A, \tag{2.1.6}$$

где ξ^i, η^j – комплексные числа, определена операция вычисления коммутатора

$$[a, b] = ab - ba \tag{2.1.7}$$

как

$$[a, b] = [\xi^i \, a_i, \eta^j \, a_j] = \xi^i \, \eta^j \, [a_i, a_j] = \xi^i \, \eta^j \, c_{ij}^k a_k \; \in A, \tag{2.1.8}$$

который в силу соотношений (2.1.1) также принадлежит множеству A:

$$[a, b] = \in A. \tag{2.1.9}$$

Из определения (2.1.7) следует, что имеют место соотношения

$$[a, b] = -[b, a], \tag{2.1.10}$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \tag{2.1.11}$$

для любых элементов

$$a = \xi^i a_i, \quad b = \eta^j a_j, \quad c = \zeta^k a_k, \qquad a \in A,\, b \in A,\, c \in A, \quad (2.1.12)$$

где ξ^i, η^j, ζ^k – вещественные или комплексные числа.

Соотношение (2.1.10) отражает антисимметричность операции вычисления коммутатора, а соотношение (2.1.11) отражает неассоциативность вычисления двойного коммутатора и носит название тождества Якоби.

Из соотношений (2.1.10) и (2.1.11) следуют соответствующие соотношения для структурных констант

$$c^k_{ij} = -c^k_{ji}, \quad (2.1.13)$$

$$c^k_{im}\, c^m_{jl} + c^k_{jm}\, c^m_{li} + c^k_{lm}\, c^m_{ij} = 0, \quad (2.1.14)$$

первое из которых отражает антисимметричность структурных констант по нижним индексам, а второе носит название тождества Якоби для структурных констант.

В результате мы приходим к понятию алгебры Ли. Алгеброй Ли называется линейное векторное пространство A, в котором для любой пары элементов $a \in A$, $b \in A$ определена бинарная операция вычисления коммутатора $[a, b]$ со свойствами (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11). В зависимости от того, являются ли числа ξ^i, η^j, ζ^k в (2.1.12) вещественными или комплексными, алгебра Ли A называется вещественной или комплексной соответственно. Отметим, что для исследования свойств алгебр Ли использование для коммутатора $[a, b]$ его выражения в виде (2.1.7) не является необходимым, достаточно лишь его свойств (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11).

Таким образом, группа Ли G порождает свою алгебру Ли A, которая образуется генераторами a_i и их всевозможными линейными комбинациями вида $a = \xi^i a_i$ с задаваемыми структурными константами c^k_{ij} коммутационными соотношениями (2.1.1), (2.1.8) со свойствами (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11). С другой стороны , как мы показали в параграфе (1.4), структурные константы c^k_{ij} определяют закон умножения конечных элементов группы Ли в некоторой связной области, содержащей единичный элемент группы, т. е. по алгебре Ли A можно восстановить соответствующую ей локальную группу Ли. Эту связь между группой Ли G и ее алгеброй Ли A будем изображать как

$$G \overset{\dashleftarrow}{\longrightarrow} A. \tag{2.1.15}$$

Некоторые элементы алгебры Ли могут взаимно коммутировать друг с другом. Максимальное число линейно независимых взаимно коммутирующих элементов алгебры Ли называется рангом алгебры Ли и рангом соответствующей ей группы Ли.

Две алгебры Ли A и A' называются изоморфными, если между элементами этих алгебр можно установить взаимно однозначное соответствие $a \in A \leftrightarrow a' \in A'$, такое, что для любых

$$a \in A \leftrightarrow a' \in A', \quad b \in A \leftrightarrow b' \in A' \tag{2.1.16}$$

имеют место равенства

$$\xi a + \eta b \leftrightarrow (\xi a + \eta b)' = \xi a' + \eta b', \tag{2.1.17}$$

$$[a, b] \leftrightarrow [a, b]' = [a', b'], \tag{2.1.18}$$

где ξ, η – вещественные или комплексные числа. Вследствие соотношений (2.1.17), (2.1.18) соответствие (2.1.16) является линейным и сохранающим правило вычисления коммутаторов.

Такое соответствие можно задать, указав его между базисными элементами a_i и a'_i алгебр Ли A и A' в виде

$$a_i \in A \leftrightarrow a'_i \in A', \quad a_j \in A \leftrightarrow a'_j \in A', \tag{2.1.19}$$

$$\xi a_i + \eta a_j \leftrightarrow (\xi a_i + \eta a_j)' = \xi a'_i + \eta a'_j, \tag{2.1.20}$$

$$[a_i, a_j] = c_{ij}^k\, a_k \leftrightarrow [a_i, a_j]' = [a'_i, a'_j] = {c'}_{ij}^k\, a'_k. \tag{2.1.21}$$

Из соотношений (2.1.20), (2.1.21) следует, что изоморфные алгебры Ли A и A' при соответствии (2.1.19) имеют одинаковые структурные константы $c_{ij}^k = {c'}_{ij}^k$. Как следствие этого, группы Ли G и G', имеющие изоморфные порождаемые ими алгебры Ли A и A', локально изоморфны.

Если в группе G есть подгруппа

$$H \subset G \tag{2.1.22}$$

порядка p', то, обозначая параметры подгруппы H и соответствующие им генераторы как $\alpha^{i'}$ и $a_{i'}$ соответственно, $i' = 1, 2, ..., p'$, для генераторов подгруппы H будем иметь коммутационные соотношения

$$[a_{i'}, a_{j'}] = c_{i'j'}^{k'} a_{k'}, \tag{2.1.23}$$

где i', j', $k' = 1, 2, ..., p'$, а $c_{i'j'}^{k'}$ – структурные константы подгруппы H, при этом очевидно, что

$$c_{i'j'}^{k''} = 0 \tag{2.1.24}$$

для $k'' = p' + 1, p' + 2, ..., p$.

Генераторы $a_{i'}$ подгруппы H и их линейные комбинации вида $b = \xi^{i'} a_{i'}$ образуют в алгебре A подмножество B

$$B \subset A, \tag{2.1.25}$$

для любой пары элементов которого

$$b = \xi^{i'} a_{i'}, \quad b' = \eta^{j'} a_{j'}, \ \ b \in B, \ b' \in B \tag{2.1.26}$$

в силу коммутационных соотношений (2.1.23) следует, что

$$[b, b'] \in B. \tag{2.1.27}$$

Множество (2.1.25) со свойствами (2.1.26), (2.1.27) называется подалгеброй алгебры A. Между подгруппой (2.1.22) и подалгеброй (2.1.25) имеет место аналогичная (2.1.15) связь

$$H \overset{\dashleftarrow}{\longrightarrow} B. \tag{2.1.28}$$

Как известно, подгруппа $H \subset G$ называется инвариантной (или самосопряженной), если для любых элементов

$$g \in G, \ \ h \in H \tag{2.1.29}$$

выполняется соотношение

$$ghg^{-1} = h' \in H. \tag{2.1.30}$$

Рассматривая соотношение (2.1.30) при элементах $h \approx e + b + ...$, $h' \approx e + b' + ...$, близких к единичному, из (2.1.30) получаем, что для любого $b \in B$ и любого $g \in G$ имеет место равенство

$$gbg^{-1} = b' \in B, \tag{2.1.31}$$

где B – алгебра Ли инвариантной подгруппы H. Рассматривая соотношение (2.1.31) при элементе $g \approx e + a + ...$, близком к единичному, из (2.1.31) получаем, что для любых элементов

$$a \in A, \quad b \in B \tag{2.1.32}$$

выполняется соотношение

$$[a, b] = b' \in B. \tag{2.1.33}$$

Подалгебра $B \subset A$ называется инвариантной, если для любых $b \in B$ и $g \in G$ выполняется условие (2.1.31) (или для любых элементов (2.1.32) выполняется условие (2.1.33)). Условие (2.1.33), в частности, означает, что

$$c_{ij'}^{k''} = 0 \tag{2.1.34}$$

для $i = 1, 2, ..., p$; $j' = 1, 2, ..., p'$; $k'' = p' + 1, p' + 2, ..., p$.

Подгруппа H называется абелевой (или коммутативной), если для любых двух ее элементов

$$h \in H, \quad h' \in H \tag{2.1.35}$$

выполняется соотношение

$$hh' = h'h. \tag{2.1.36}$$

Абелева инвариантная подгруппа называется центром группы.

В соответствии с этим подалгебра B называется абелевой (коммутативной), если для любых двух ее элементов

$$b \in B, \quad b' \in B \tag{2.1.37}$$

выполняется соотношение

$$[b, b'] = 0. \tag{2.1.38}$$

Абелева инвариантная подалгебра называется центром алгебры.

Как известно, группа G называется простой, если в ней нет инвариантных подгрупп, и полупростой, если в ней нет абелевых инвариантных подгрупп. В соответствии с этими определениями алгебра Ли A называется простой, если в ней нет инвариантных подалгебр, и полупростой, если в ней нет абелевых инвариантных подалгебр. Алгебру Ли будем называть компактной, если она порождается компактной группой Ли. Понятия простоты, полупростоты и компактности играют важную роль в теории групп и алгебр Ли.

2.2. Линейные представления алгебры Ли. Присоединенное представление алгебры Ли и группы Ли

Линейным представлением алгебры Ли называется отображение каждого из ее элементов $a \in A$ в соответствующий линейный оператор T_a

$$a \to T_a, \tag{2.2.39}$$

обладающее свойствами

$$\xi a + \eta b \to T_{\xi a + \eta b} = \xi T_a + \eta T_b, \tag{2.2.40}$$

$$[a, b] \to T_{[a,b]} = [T_a, T_b], \tag{2.2.41}$$

где ξ, η – произвольные комплексные числа, $a \in A$, $b = \in A$ – произвольные элементы алгебры Ли, а

$$[T_a, T_b] \equiv T_a T_b - T_b T_a \tag{2.2.42}$$

– коммутатор соответствующих им операторов T_a и T_b.

Для определения отображения (2.2.39) достаточно задать отображение вида (2.2.39) для каждого из базисных элементов a_i алгебры Ли:

$$a_i \to T_{a_i}. \tag{2.2.43}$$

Тогда отображение (2.2.39) для произвольного элемента алгебры Ли

$$a = \xi^i a_i \in A \tag{2.2.44}$$

согласно свойству (2.2.40) примет вид

$$a \to T_a = \xi^i T_{a_i}. \tag{2.2.45}$$

Легко видеть, что операторы T_{a_i} должны удовлетворять коммутационным соотношениям:

$$[T_{a_i}, T_{a_j}] = c_{ij}^k \, T_{a_k}. \tag{2.2.46}$$

Для этого достаточно, используя свойства (2.2.40) , (2.2.41), убедиться в справедливости цепочки соотношений:

$$[a_i, a_j] = c_{ij}^k\, a_k \to T_{[a_i, a_j]} = [T_{a_i}, T_{a_j}] = T_{c_{ij}^k a_k} = c_{ij}^k\, T_{a_k}. \quad (2.2.47)$$

Как видим, коммутационные соотношения (2.2.46) совпадают с коммутационными соотношениями (1.7.143) для генераторов A_i представлений группы Ли. Поэтому можно считать, что, подобно тому как базисные элементы a_i алгебры Ли совпадают с генераторами соответствующей группы Ли, операторы T_{a_i} представления алгебры Ли совпадают с генераторами A_i представления соответствующей группы Ли, т. е. что

$$T_{a_i} = A_i. \quad (2.2.48)$$

Другими словами, представление алгебры Ли естественно порождается представлением соответствующей ей группы Ли.

Особую роль в теории алгебр Ли и групп Ли и их приложений в физике играет так называемое присоединенное представление. В дальнейшем (вместо буквы T, которую сохраним для обозначения произвольного представления) для обозначения присоединенного представления мы будем использовать букву P. В этих обозначениях отображение (2.2.43) для присоединенного представления запишется как

$$a_i \to P_{a_i}, \quad (2.2.49)$$

где P_{a_i} – операторы присоединенного представления алгебры Ли.

Операторы P_{a_i} при выбранном базисе в пространстве представления описываются $p \times p$ - матрицами, по определению задаваемыми структурными константами в виде

$$(P_{a_i})_j^k = c_{ij}^k, \quad (2.2.50)$$

где $i, j, k = 1, 2, ..., p$, p – размерность алгебры Ли (совпадающая с порядком соответствующей ей группы Ли).

Для произвольного элемента алгебры Ли (2.2.44) будем иметь отображение

$$a \to P_a = \xi^i P_{a_i}, \quad (2.2.51)$$

где оператор P_a определяется его матрицей

$$(P_a)_j^k = \xi^i c_{ij}^k. \tag{2.2.52}$$

Покажем, что отображение (2.2.51), (2.2.52) действительно является представлением алгебры Ли. Для коммутатора (2.1.8) двух произвольных элементов (1.4.74) алгебры Ли имеем отображение

$$[a, b] \to P_{[a,b]} = P_{\xi^i \eta^j c_{ij}^k a_k} = \xi^i \eta^j c_{ij}^k P_{a_k}. \tag{2.2.53}$$

Из (2.2.53) для матрицы оператора $P_{[a,b]}$ получаем выражения

$$(P_{[a,b]})_n^m = \xi^i \eta^j c_{ij}^k (P_{a_k})_n^m = \xi^i \eta^j c_{ij}^k c_{kn}^m = \tag{2.2.54}$$

$$= \xi^i \eta^j [P_{a_i}, P_{a_j}]_n^m = [P_a, P_b]_n^m. \tag{2.2.55}$$

Результат (2.2.55) получается приведением содержащегося в (2.2.54) произведения структурных констант с учетом их свойств (2.1.14), (2.1.13) к виду

$$c_{ij}^k c_{kn}^m = -(c_{jn}^k c_{ki}^m + c_{ni}^k c_{kj}^m) = c_{ik}^m c_{jn}^k - c_{jk}^m c_{in}^k = \tag{2.2.56}$$

$$= (P_{a_i} P_{a_j} - P_{a_j} P_{a_i})_n^m = [P_{a_i}, P_{a_j}]_n^m. \tag{2.2.57}$$

Из (2.2.53), (2.2.54), (2.2.55) следует, что

$$[a, b] \to P_{[a,b]} = [P_a, P_b], \tag{2.2.58}$$

т. е. отображение (2.2.51), (2.2.52) действительно является представлением алгебры Ли.

Присоединенное представление алгебры Ли можно реализовать как совокупность преобразований над элементами самой алгебры Ли, рассматриваемой в этом отношении как пространство представления. Действительно, пусть

$$b = \eta^i a_i \in A \tag{2.2.59}$$

– произвольный элемент алгебры Ли A, который можно рассматривать как вектор в линейном векторном пространстве, которым является сама алгебра Ли A. Определим преобразования $P_a(b)$ над векторами (2.2.59), соответствующие элементу (2.2.44) алгебры Ли, через нахождения их коммутатора в виде

$$P_a(b) = [a, b]. \tag{2.2.60}$$

Действительно, действуя преобразованием (2.2.60) при $a = a_i$ на базисный элемент a_j алгебры Ли, получаем, что

$$P_{a_i}(a_j) = [a_i, a_j] = c_{ij}^k\, a_k = (P_{a_i})_j^k\, a_k, \tag{2.2.61}$$

т. е. матрица $(P_{a_i})_j^k$ рассматриваемого преобразования совпадает с (2.2.50). Действуя преобразованием (2.2.60) на базисный элемент a_j алгебры Ли, получаем, что

$$P_a(a_j) = [a, a_j] = [\xi^i a_i, a_j] = \xi^i [a_i, a_j] = \xi^i c_{ij}^k\, a_k = (P_a)_j^k\, a_k, \tag{2.2.62}$$

т. е. матрица преобразования (2.2.60) совпадает с (2.2.52). Преобразование (2.2.60) произвольного вектора (2.2.59) можно представить в виде

$$P_a(b) = [a, \eta^j a_j] = \eta^j (P_a)_j^k\, a_k, \tag{2.2.63}$$

где $(P_a)_j^k$ определяется выражением (2.2.52).

Покажем, что преобразование (2.2.60) действительно реализует представление алгебры Ли. Для этого рассмотрим преобразование вида (2.2.60), соответствующее коммутатору $[a, b]$ двух элементов алгебры Ли и действующее на произвольный вектор $c \in A$:

$$P_{[a,b]}(c) = [[a, b], c]. \tag{2.2.64}$$

Правую часть равенства (2.2.64), с учетом свойств (2.1.11), (2.1.10) и определения (2.2.60), можно привести к виду

$$[[a, b], c] = -[c, [a, b]] = [a, [b, c]] + [b, [c, a]] = \tag{2.2.65}$$

$$= [a, [b, c]] - [b, [a, c]] = \tag{2.2.66}$$

$$= [a, P_b(c)] - [b, P_a(c)] = P_a(P_b(c)) - P_b(P_a(c)) = \tag{2.2.67}$$

$$= (P_a P_b)(c) - (P_b P_a)(c) = [P_a, P_b](c). \tag{2.2.68}$$

Из (2.2.64) – (2.2.68) следует, что

$$P_{[a,b]}(c) = [P_a, P_b](c), \tag{2.2.69}$$

т. е. преобразование (2.2.60) действительно реализует представление алгебры Ли.

Понятие присоединенного представления алгебры Ли можно расширить до понятия присоединенного представления группы Ли. Для этого рассмотрим сначала преобразование, осуществляемое элементом группы Ли g над элементами g_0 этой же группы, вида

$$g_0 \xrightarrow{g} g_0' = g g_0 g^{-1}. \tag{2.2.70}$$

Преобразования (2.2.70) образуют так называемую группу внутренних автоморфизмов группы Ли.

Рассмотрим теперь элементы g_0, близкие к единичному

$$g_0 \approx e + a_0 + \dots\,, \tag{2.2.71}$$

где a_0 – генератор элемента g_0. Тогда преобразования (2.2.70) над элементами (2.2.71) можно представить в виде

$$g_0 \xrightarrow{g} g_0' = g g_0 g^{-1} \approx e + g a_0 g^{-1} + \dots\,. \tag{2.2.72}$$

Из (2.2.71), (2.2.72) видно, что преобразования (2.2.70) индуцируют над элементами a_0 алгебры Ли преобразования вида

$$a_0 \xrightarrow{g} a_0' = g a_0 g^{-1} \equiv P_g(a_0). \tag{2.2.73}$$

Как легко видеть, операторы

$$P_g(a_0) = g a_0 g^{-1} \tag{2.2.74}$$

удовлетворяют условию

$$P_{g_1 g_2}(a_0) = P_{g_1}(P_{g_2}(a_0)), \tag{2.2.75}$$

т. е. отображение

$$g \to P_g(a_0) \tag{2.2.76}$$

является представлением группы Ли, операторы которого P_g действуют на элементы a_0 алгебры Ли самой группы Ли. Это представление называется присоединенным представлением группы Ли.

Для элемента g, близкого к единичному

$$g \approx e + a + \dots\,, \tag{2.2.77}$$

где a – генератор элемента g, преобразование (2.2.74) дает

$$P_g(a_0) \approx a_0 + [a, a_0] + \dots \equiv a_0 + P_a(a_0) + \dots\,, \tag{2.2.78}$$

где оператор

$$P_a(a_0) = [a, a_0] \tag{2.2.79}$$

совпадает с введенным ранее оператором (2.2.60).

При $g = e^a$, как можно убедиться непосредственной проверкой, имеет место соотношения

$$P_g(a_0) = g a_0 g^{-1} = e^{P_a}(a_0) = \tag{2.2.80}$$

$$= (I + P_a + \frac{1}{2!}P_a P_a + \frac{1}{3!}P_a P_a P_a + \dots)(a_0) = \tag{2.2.81}$$

$$= a_0 + P_a(a_0) + \frac{1}{2!}P_a(P_a(a_0)) + \frac{1}{3!}P_a(P_a(P_a(a_0))) + \dots\,. \tag{2.2.82}$$

2.3. Инвариантная билинейная форма. Форма Киллинга

Будем говорить, что в алгебре Ли A задана билинейная форма, если для любых двух элементов $a \in A$, $b \in A$ алгебры Ли определена числовая функция $f(a, b)$ этих элементов со свойствами

$$f(\xi a + \xi' a', b) = \xi f(a, b) + \xi' f(a', b), \tag{2.3.83}$$

$$f(a, \eta b + \eta' b') = \eta f(a, b) + \eta' f(a, b'), \tag{2.3.84}$$

где ξ, ξ', η, η' – вещественные или комплексные числа, а $a \in A$, $a' \in A$, $b \in A$, $b' \in A$ – произвольные элементы алгебры Ли.

Используя для элементов a, b их разложения (2.1.6) по базисным элементам, билинейную форму можно определить как

$$f(a, b) = f_{ij}\, \xi^i \eta^j, \tag{2.3.85}$$

где

$$f_{ij} = f(a_i, a_j) \tag{2.3.86}$$

– матрица, определяющая форму $f(a,b)$, а ξ^i, η^j – координаты элементов a, b относительно выбранного базиса.

Форма $f(a,b)$ будет называться инвариантной, если для любого элемента $g \in G$ группы Ли G и любых элементов $a \in A$, $b \in A$ алгебры Ли A форма $f(a,b)$ удовлетворяет условию

$$f(P_g(a), P_g(b)) = f(a,b), \tag{2.3.87}$$

где $P_g(a)$ – операция, определенная в соответствии с соотношениями (2.2.74), (2.2.80) – (2.2.82).

Используя в (2.3.87) элементы $g = e^c \approx e + c + ...$, близкие к единичному, из (2.3.87) получаем условие инвариантности формы $f(a,b)$ в виде

$$f(P_c(a), b) + f(a, P_c(b)) = 0 \tag{2.3.88}$$

или с учетом (2.2.79) в виде

$$f([c,a], b) + f(a, [c,b]) = 0. \tag{2.3.89}$$

Покажем, что при выполнении условия (2.3.88) выполняется и условие (2.3.87). Для этого введем однопараметрическую подгруппу

$$g(t) = e^{t\,c}, \qquad g(0) = e, \qquad g(1) = g \tag{2.3.90}$$

и рассмотрим билинейную форму вида

$$f\big(a, b; t\big) \;=\; f\big(P_{g(t)}(a), P_{g(t)}(b)\big) = \tag{2.3.91}$$

$$=\; f\big(e^{tP_c}(a), e^{tP_c}(b)\big) = f\big(a(t), b(t)\big), \tag{2.3.92}$$

где

$$a(t) = e^{\,tP_c}(a), \qquad b(t) = e^{\,tP_c}(b), \tag{2.3.93}$$

$$f\big(a, b; 0\big) = f\big(a, b\big), \qquad f\big(a, b; 1\big) = f\big(P_g(a), P_g(b)\big). \tag{2.3.94}$$

Задав параметру t малое приращение δt, из (2.3.91), (2.3.92) получаем равенства

$$f\big(a, b; t+\delta t\big) = f\Big(e^{(t+\delta t)P_c}(a),\, e^{(t+\delta t)P_c}(b)\Big) = \tag{2.3.95}$$

$$= f\Big(e^{\,\delta t P_c}(a(t)),\, e^{\,\delta t P_c}(b(t))\Big) \approx \tag{2.3.96}$$

$$\approx f\Big(a(t) + \delta t P_c(a(t)) + \ldots,\, b(t) + \delta t P_c(b(t)) + \ldots\Big) \approx \tag{2.3.97}$$

$$\approx f\big(a, b; t\big) + \delta t\Big(f\big(P_c(a(t)), b(t)\big) + f\big(a(t), P_c(b(t))\big)\Big) + \ldots . \tag{2.3.98}$$

Из (2.3.95), (2.3.98) с учетом (2.3.88) следует, что

$$\frac{d\, f\big(a, b; t\big)}{dt} = f\big(P_c(a(t)), b(t)\big) + f\big(a(t), P_c(b(t)\big) = 0. \tag{2.3.99}$$

Обращение в ноль правой части уравнения (2.3.99) является следствием условия (2.3.88) для элементов $a(t), b(t)$ и означает, что $f\big(a, b; t\big)$ в действительности не зависит от t и, в частности, что

$$f\big(a, b; 1\big) = f\big(a, b; 0\big), \tag{2.3.100}$$

откуда с учетом (2.3.94) и следует равенство (2.3.87).

Важную роль в теории алгебр Ли и групп Ли и их приложений в физике играет инвариантная билинейная форма Киллинга $g(a, b)$, которую можно определить как

$$g(a, b) = -Tr(P_a P_b) = -(P_a)^l_k (P_b)^k_l, \tag{2.3.101}$$

где символ $Tr(\ldots)$ означает взятие шпура от матрицы, стоящей внутри скобок, знак минус в (2.3.101) введен для согласования с определением, часто используемым в приложениях.

Применяя выражение (2.2.52) для матричных элементов входящих в (2.3.101) матриц, из (2.3.101) для элементов (2.1.6) получаем, что

$$g(a, b) = g_{ij}\, \xi^i \eta^j, \tag{2.3.102}$$

где матрица g_{ij}, определяющая форму Киллинга $g(a, b)$, выражается через структурные константы группы Ли в виде

$$g_{ij} = -c^l_{ik}\, c^k_{jl}. \tag{2.3.103}$$

Отметим, что форма Киллинга (2.3.101) является симметричной $g(a,b) = g(b,a)$, что отражается в симметричности $g_{ij} = g_{ji}$ ее матрицы (2.3.103).

Покажем, что форма Киллинга (2.3.101) удовлетворяет условию инвариантности, взятому в виде (2.3.89), т. е. что

$$g([c,a],b) + g(a,[c,b]) = 0. \tag{2.3.104}$$

Используя определение (2.3.101) и свойство (2.2.58) матриц присоединенного представления, левую часть равенства (2.3.104) можно преобразовать как

$$g([c,a],b) + g(a,[c,b]) = -\big(Tr(P_{[c,a]}P_b) + Tr(P_a P_{[c,b]})\big) = \tag{2.3.105}$$

$$= -\big(Tr([P_c,P_a]P_b + P_a[P_c,P_b])\big) = 0. \tag{2.3.106}$$

Обращение в ноль выражения (2.3.106) происходит после раскрытия коммутаторов и с учетом возможности циклических перестановок матриц под знаком шпура. Из (2.3.105), (2.3.106) и следует выполнение условия (2.3.104).

В заключение параграфа приведем (без доказательства) критерий Картана полупростоты алгебры Ли. Для полупростоты алгебры Ли необходимо и достаточно, чтобы форма Киллинга была невырожденной, т. е. чтобы

$$det\,|\,g_{ij}\,| \neq 0. \tag{2.3.107}$$

2.4. Единственность инвариантной билинейной формы в алгебре Ли простой группы

Теорема 2.4. Инвариантная билинейная форма в алгебре Ли простой группы единственна с точностью до числового множителя.

Пусть G – простая группа Ли, A – ее алгебра Ли и в A существует инвариантная билинейная $f(a,b)$.

Вспомогательное утверждение 2.4.1. Присоединенное представление простой группы Ли G в ее алгебре Ли A неприводимо.

Для доказательства утверждения 2.4.1 допустим противное, т. е. что рассматриваемое представление приводимо. Это означает, что в A имеется подпространство $A_0 \subset A$, такое что для любого $g \in G$ и любого $a_0 \in A_0$ имеет место равенство

$$P_g(a_0) = a_0' \in A_0. \qquad (2.4.108)$$

Применяя (2.4.108) к элементу g, близкому к единичному, $g \approx e + c + ...$, где c – генератор элемента g, из (2.4.108) получаем, что

$$P_c(a_0) = [c, a_0] = a_0'' \in A_0, \qquad (2.4.109)$$

где $a_0'' = a_0' - a_0$.

Отметим, что из (2.4.109) следует условие (2.4.108). Действительно, представляя элемент g в виде $g = e^c$, где c – генератор элемента g, и используя соотношения (2.2.80), (2.2.82), имеем

$$P_g(a_0) = g a_0 g^{-1} = e^{P_c}(a_0) = \qquad (2.4.110)$$

$$= a_0 + P_c(a_0) + \frac{1}{2!}P_c(P_c(a_0)) + \frac{1}{3!}P_c(P_c(P_c(a_0))) + \ldots . \qquad (2.4.111)$$

Вследствие условия (2.4.109) каждое слагаемое в (2.4.111) является элементом подпространства A_0, в результате чего из условия (2.4.109) следует равенство (2.4.108).

Подпространство A_0 является подалгеброй. Действительно, рассмотрим два произвольных вектора этого подпространства:

$$a_0^{(1)} \in A_0, \quad a_0^{(2)} \in A_0. \qquad (2.4.112)$$

Каждое из них удовлетворяет условию (2.4.108) и, следовательно, условию (2.4.109), т. е. имеют место соотношения:

$$P_c(a_0^{(1)}) = [c, a_0^{(1)}] \in A_0, \qquad (2.4.113)$$

$$P_c(a_0^{(2)}) = [c, a_0^{(2)}] \in A_0. \qquad (2.4.114)$$

Действуя оператором (2.4.109) на коммутатор $[a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]$, получаем

$$P_c([a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]) = [c, [a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]]. \qquad (2.4.115)$$

Входящий в (2.4.115) двойной коммутатор с использованием свойств (2.1.11), (2.1.10) алгебры Ли преобразуется к виду

$$[c, [a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]] = -\big([a_0^{(1)}, [a_0^{(2)}, c]] + [a_0^{(2)}, [c, a_0^{(1)}]]\big) = \qquad (2.4.116)$$

$$= -[[c, a_0^{(2)}], a_0^{(1)}] + [[c, a_0^{(1)}], a_0^{(2)}] \in A_0, \qquad (2.4.117)$$

где последнее заключение следует для каждого из слагаемых из (2.4.113) и (2.4.114) при $c = -[c, a_0^{(2)}]$ и $c = [c, a_0^{(1)}]$ соответственно. Из (2.4.115), (2.4.116), (2.4.117) следует, что

$$P_c([a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]) \in A_0. \tag{2.4.118}$$

Из (2.4.110), (2.4.111) при $a_0 = [a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]$ с учетом (2.4.118) следует, что

$$P_g([a_0^{(1)}, a_0^{(2)}]) \in A_0, \tag{2.4.119}$$

т. е. что

$$[a_0^{(1)}, a_0^{(2)}] \in A_0. \tag{2.4.120}$$

Соотношения (2.4.112), (2.4.120) означают, что подпространство A_0 является подалгеброй.

С учетом определений (2.1.31), (2.2.74) соотношение (2.4.108) означает, что подалгебра A_0 является инвариантной. Соответствующая подалгебре A_0 подгруппа $H_0 \subset G$

$$H_0 \overset{\dashleftarrow}{\longrightarrow} A_0 \tag{2.4.121}$$

является инвариантной, т. е. группа G не является простой, что противоречит условию утверждения 2.4.1. Утверждение 2.4.1 доказано.

Условие инвариантности (2.3.87) билинейной формы (2.3.85) можно представить в виде

$$f_{kl}\, \xi'^k \eta'^l = f_{ij}\, \xi^i \eta^j, \tag{2.4.122}$$

где ξ'^k, η'^l – координаты векторов $P_g(a)$, $P_g(b)$, определяемые соотношениями

$$P_g(a) = P_g(\xi^i a_i) = \xi^i P_g(a_i) = \xi^i (P_g)_i^k a_k = \xi'^k a_k, \tag{2.4.123}$$

$$P_g(b) = P_g(\eta^j a_j) = \eta^j P_g(a_j) = \eta^j (P_g)_j^l a_l = \eta'^l a_l. \tag{2.4.124}$$

Извлекая координаты ξ'^k, η'^l из(2.4.123), (2.4.124) и подставляя их в (2.4.122), с учетом произвольности координат ξ^i, η^j из (2.4.122) получаем уравнения для матричных элементов f_{ij} матрицы f в виде

$$f_{kl}\, (P_g)_i^k (P_g)_j^l = f_{ij}, \tag{2.4.125}$$

где $(P_g)_i^k$, $(P_g)_j^l$ – матричные элементы матрицы P_g, также определяемые соотношениями (2.4.123), (2.4.124). Уравнения (2.4.125) можно записать в матричном виде как

$$(P_g)^T f\, P_g = f, \tag{2.4.126}$$

где $(P_g)^T$ – матрица, транспонированная к матрице P_g, т. е. $((P_g)^T)_k^i = (P_g)_i^k$.

Уравнение (2.4.127) перепишем в виде

$$f\, P_g = \tilde{P}_g\, f, \tag{2.4.127}$$

где введены матрицы

$$\tilde{P}_g = \big((P_g)^T\big)^{-1}. \tag{2.4.128}$$

Матрицы (2.4.128) реализуют некоторое представление группы Ли вследствие цепочки легко проверяемых равенств:

$$\tilde{P}_{g_1 g_2} = \big((P_{g_1 g_2})^T\big)^{-1} = \big((P_{g_1} P_{g_2})^T\big)^{-1} = \tag{2.4.129}$$

$$= \big((P_{g_2})^T (P_{g_1})^T\big)^{-1} = \big((P_{g_1})^T\big)^{-1} \big((P_{g_2})^T\big)^{-1} = \tilde{P}_{g_1} \tilde{P}_{g_2}. \tag{2.4.130}$$

Представление, реализуемое матрицами (2.4.128), называется сопряженным или контраградиентным по отношению к исходному представлению P_g.

Как показано выше (см. утверждение 2.4.1), представление P_g неприводимо. Можно показать, что в этом случае представление $\tilde{P}_g$ тоже неприводимо. Таким образом, в равенство (2.4.127) входят матрицы двух неприводимых представлений P_g и $\tilde{P}_g$ и в случае, если они неэквивалентны, матрица f вследствие известной в теории групп второй леммы Шура должна бы быть нулевой, что противоречио бы сделанному нами предположению о существовании инвариантной билинейной формы $f(a, b)$. Следовательно, представления P_g и $\tilde{P}_g$ эквивалентны, т. е. существует невырожденная матрица S, такая что

$$\tilde{P}_g = S\, P_g\, S^{-1}. \tag{2.4.131}$$

Подставляя (2.4.131) в (2.4.127), получаем равенство

$$f\, P_g = S\, P_g\, S^{-1}\, f, \tag{2.4.132}$$

из которого следует, что

$$S^{-1}\, f\, P_g = P_g\, S^{-1}\, f. \tag{2.4.133}$$

Из (2.4.133) вследствие первой леммы Шура следует, что

$$S^{-1}\, f = \lambda\, I, \tag{2.4.134}$$

где λ – числовой множитель, т. е.

$$f = \lambda\, S. \tag{2.4.135}$$

Допустим, что в A существует еще одна инвариантная билинейная форма

$$f'(a,b) = f'_{ij}\, \xi^i \eta^j, \tag{2.4.136}$$

где f'_{ij} – матрица, определяющая форму $f'(a,b)$, а ξ^i, η^j – координаты элементов a, b относительно выбранного базиса.

Повторяя для формы $f'(a,b)$ рассуждения, проведенные нами для формы $f(a,b)$, получаем, что

$$f' = \lambda'\, S', \tag{2.4.137}$$

где λ' – соответствующий числовой множитель, а S' определяется аналогичным (2.4.131) равенством

$$\tilde{P}_g = S'\, P_g\, S'^{-1}, \tag{2.4.138}$$

здесь мы приняли во внимание, что матрица S, осуществляющая эквивалентность в (2.4.131), возможно, неединственна.

Приравнивая друг другу левые части равенств (2.4.131) и (2.4.138), получаем соотношение

$$S\, P_g\, S^{-1} = S'\, P_g\, S'^{-1}, \tag{2.4.139}$$

из которого следует равенство

$$S'^{-1}\, S\, P_g = P_g\, S'^{-1}\, S. \tag{2.4.140}$$

Из (2.4.140) вследствие первой леммы Шура следует, что

$$S'^{-1}\, S = \lambda''\, I, \tag{2.4.141}$$

где λ'' – числовой множитель, т. е.

$$S' = \frac{1}{\lambda''}\,S. \tag{2.4.142}$$

Подставляя (2.4.142) в (2.4.137) и учитывая (2.4.135), получаем, что

$$f' = \frac{\lambda'}{\lambda''}\,S = \frac{\lambda'}{\lambda''\lambda}\,f, \tag{2.4.143}$$

т. е., действительно, в алгебре Ли простой группы две инвариантные формы $f'(a,b)$ и $f(a,b)$ отличаются только числовым множителем. Теорема 2.4 доказана.

В качестве следствия этой теоремы отметим, что в алгебре Ли простой группы форма Киллинга (2.3.101), определяемая также соотношениями (2.3.102), (2.3.103), является единственной с точностью до числового множителя инвариантной билинейной формой.

2.5. Положительная определенность инвариантной билинейной формы в алгебре Ли компактной группы

Теорема 2.5. В вещественной алгебре Ли компактной группы всегда можно ввести симметричную положительно определенную инвариантную билинейную форму.

Пусть G – компактная группа Ли и A – ее вещественная алгебра Ли. Элементы вещественной алгебры Ли можно представить в виде

$$a = \alpha^i\,a_i, \;\; b = \beta^j\,a_j, \quad a \in A,\, b \in A, \tag{2.5.144}$$

где a_i, $i = 1, 2, ..., p$ – базисные элементы алгебры Ли A (генераторы группы Ли G), а α^i, β^j – вещественные числа.

Покажем, что в A можно ввести билинейную форму

$$f(a,b) = f_{ij}\,\alpha^i\beta^j, \tag{2.5.145}$$

удовлетворяющую условиям симметричности

$$f(a,b) = f(b,a), \;\; \text{т. е.} \;\; f_{ij} = f_{ij}, \tag{2.5.146}$$

положительной определенности

$$f(a,a) > 0 \ \text{ для любых } a \neq 0 \tag{2.5.147}$$

и условию инвариантности (2.3.87).

Рассмотрим билинейную форму

$$\varphi(a,b) = \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + ... + \alpha^p\beta^p = \sum_{i=1}^{p} \alpha^i\beta^i. \tag{2.5.148}$$

Очевидно, форма (2.5.148) симметрична

$$\varphi(a,b) = \varphi(b,a) \tag{2.5.149}$$

и удовлетворяет условию положительной определенности

$$\varphi(a,a) > 0 \ \text{ для любых } a \neq 0, \tag{2.5.150}$$

однако она, вообще говоря, не является инвариантной, т. е. выражение $\varphi(P_{g'}(a), P_{g'}(b))$, вообще говоря, является функцией от g'.

Проинтегрируем выражение $\varphi(P_{g'}(a), P_{g'}(b))$ по g' в смысле интеграла (1.6.108), удовлетворяющего условию правоинвариантности (1.6.110), т. е. рассмотрим интеграл

$$f(a,b) = \int \varphi(P_{g'}(a), P_{g'}(b))\, dg'. \tag{2.5.151}$$

Подынтегральное выражение в (2.5.151) вследствие условия (2.5.150) является положительно определенным, мера интегрирования в интеграле тоже положительно определена, следовательно, билинейная форма, определяемая соотношением (2.5.151), является положительно определенной, т. е. удовлетворяет условию (2.5.147).

Покажем, что билинейная форма (2.5.151) является инвариантной, т. е. удовлетворяет условию (2.3.87).

Имеем последовательность равенств

$$f(P_g(a), P_g(b)) = \int \varphi(P_{g'}(P_g(a)), P_{g'}(P_g(b)))\, dg' = \tag{2.5.152}$$

$$= \int \varphi(P_{g'g}(a), P_{g'g}(b))\, dg' = \tag{2.5.153}$$

$$= \int \varphi(P_{g'}(a), P_{g'}(b))\, dg' = f(a,b). \tag{2.5.154}$$

Выражение (2.5.152) следует из определения (2.5.151) при замене $a \to P_g(a), b \to P_g(b)$, выражение (2.5.153) следует из предыдущего вследствие свойства (2.2.75) операторов $P_{g'}(...), P_g(...)$, реализующих присоединенное представление, наконец, выражение (2.5.154) следует из (2.5.153) вследствие свойства (1.6.110) правоинвариантности интеграла (1.6.108).

Из равенств (2.5.152) – (2.5.154) следует, что билинейная форма (2.5.151) удовлетворяет условию

$$f(P_g(a), P_g(b)) = f(a, b), \tag{2.5.155}$$

т. е. является инвариантной.

Таким образом, мы показали, что билинейная форма, определяемая выражениями (2.5.151), (2.5.145), удовлетворяет условиям (2.5.146), (2.5.147), (2.5.155), т. е. является симметричной, положительно определенной и инвариантной. Теорема 2.5 доказана.

Отметим, что приведенное доказательство существенно опирается на понятие инвариантного интеграла (2.5.151), который в случае компактной группы является сходящимся. В случае некомпактной группы Ли интеграл вида (2.5.151), вследствие неограниченности области интегрирования по параметрам некомпактной группы, может оказаться расходящимся, и поэтому приведенное доказательство, вообще говоря, для некомпактной группы Ли неприменимо.

2.6. Структура алгебры Ли компактной группы

Пусть G – компактная группа Ли и A – ее вещественная алгебра Ли. Выясним, какой может быть структура группы G и ее алебры A.

Как показано в предыдущем параграфе, в алгебре A для любых двух ее элементов $a' \in A$, $a'' \in A$ существует положительно определенная инвариантная билинейная форма $f(a', a'')$ со свойствами

$$f(a', a') > 0 \quad \text{для любых } a' \neq 0, \tag{2.6.156}$$

$$f(P_g(a'), P_g(a'')) = f(a', a''). \tag{2.6.157}$$

Равенство (2.6.157) с учетом соотношений (2.3.87) – (2.3.89) приводит к равенству

$$f([a, a'], a'') + f(a', [a, a'']) = 0, \tag{2.6.158}$$

где a – генератор элемента $g \in G$.

Допустим, что группа G – непростая, т. е. содержит в себе инвариантную подгруппу $H \subset G$. Подгруппе H в алгебре Ли A соответствует инвариантная подалгебра $B \subset A$, элементы которой $b \in B$ согласно (2.1.33) удовлетворяют условию

$$[a', b] = b' \in B \quad \text{для всех } a' \in A \text{ и } b \in B\ . \tag{2.6.159}$$

Рассмотрим элементы c алгебры Ли A, ортогональные ко всем элементам $b \in B$ инвариантной подалгебры B в смысле инвариантной билинейной формы $f(a', a'')$, т. е. удовлетворяющие условию

$$f(b, c) = 0 \quad \text{для всех } b \in B, \tag{2.6.160}$$

и обозначим множество всех элементов c, удовлетворяющих условию (2.6.160), через C.

Легко убедиться, что вследствие свойства (2.6.156) множества B и C не имеют общих элементов, кроме нулевого. Предположим противное, т. е. что пересечение $B \cap C$ множеств B и C непустое, и пусть $x \in B \cap C$ – один из элементов этого пересечения. Тогда, поскольку одновременно $x \in B$ и $x \in C$, из (2.6.160) для $x \in B \cap C$ получаем равенство $f(x, x) = 0$, которое вследствие (2.6.156) может выполняться только для нулевого элемента $x = 0$, т. е. имеем соотношение

$$B \cap C = 0. \tag{2.6.161}$$

Таким образом, алгебру A можно представить в виде прямой суммы

$$A = B + C \tag{2.6.162}$$

инвариантной подалгебры B и ортогонального к ней дополнения C.

Покажем, что C тоже инвариантная подалгебра. Действительно, для любых элементов $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ имеем равенства

$$f(b, [a, c]) = -f([a, b], c]) = -f(b'', c]) = 0, \tag{2.6.163}$$

где $b'' \in B$. Первое равенство в (2.6.163) следует из равенства (2.6.158) при $a' = b, a'' = c$, второе – из (2.6.159) при $a' = a, b' = b''$ и третье – из (2.6.160).

Из равенства (2.6.163) с учетом определения (2.6.160) следует, что

$$[a, c] = c' \in C \quad \text{для всех } a \in A \text{ и } c \in C\ . \qquad (2.6.164)$$

Равенство (2.6.164) аналогично равенству (2.6.159) при замене $a' \to a$, $b \to c$, $b' \to c'$, $B \to C$ и означает, что C тоже инвариантная подалгебра.

Таким образом, если алгебра A непростая, то она можент быть разложена в виде (2.6.162) на две инвариантные подалгебры B и C. При этом вследствие (2.6.159), (2.6.164) и (2.6.161) имеет место равенство

$$[b, c] = 0 \quad \text{для всех } b \in B \text{ и } c \in C, \qquad (2.6.165)$$

т. е. в разложении (2.6.162) все элементы подалгебры B коммутируют со всеми элементами подалгебры C.

Если подалгебры B и C непростые, то каждую из них можно разложить на содержащиеся в них инвариантные подалгебры и далее продолжать разложения возникающих инвариантных подалгебр до получения уже простых инвариантных подалгебр, т. е. таких, которые уже не содержат в себе инваринтных подалгебр. При этом элементы каждой из получаемых простых инвариантных подалгебр будут вследствие свойства (2.6.165) коммутировать с элементами всех остальных инвариантных подалгебр.

Среди получаемых простых инвариантных подалгебр могут быть одномерные подалгебры, элементы каждой из которых будут коммутировать с элементами всех остальных инвариантных подалгебр, в том числе и с элементами других одномерных подалгебр. Сумма всех таких одномерных подалгебр будет образовывать абелеву (коммутативную) инвариантную подалгебру, или, согласно определению (2.1.37), (2.1.38), центр алгебры A.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.6. Алгебра Ли A компактной группы Ли G представляет собой прямую сумму

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_0 \qquad (2.6.166)$$

простых инвариантных подалгебр A_1, A_2, ... и, возможно, центра

$$A_0 = A_{01} + A_{02} + ..., \qquad (2.6.167)$$

где A_{01}, A_{02}, ... – одномерные инвариантные подалгебры.

Следствие теоремы 2.6. Группа Ли, соответствующая алгебре Ли (2.6.167) в смысле соотношения (2.1.15), представляет собой прямое произведение

$$G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_0 \tag{2.6.168}$$

простых компактных групп Ли G_1, G_2, ... и абелевой инвариантной подгруппы (центра группы G)

$$G_0 = G_{01} \times G_{02} \times ..., \tag{2.6.169}$$

где G_{01}, G_{02}, ... – однопараметрические инвариантные подгруппы.

В соответствии с определениями, приведенными в конце параграфа 2.1, полупростая алгебра Ли (и, соответственно, полупростая группа Ли) не содержит абелевых инвариантных подалгебр (соответственно, абелевых инвариантных подгрупп). Следовательно, полупростая компактная группа Ли имеет вид прямого произведения

$$G = G_1 \times G_2 \times ... \tag{2.6.170}$$

простых компактных групп Ли G_1, G_2, ... без центра G_0.

Представление компактной группы Ли в виде (2.6.168) широко используется в приложениях теории групп Ли в современной квантовой теории поля, в частности при описании моделей взаимодействия элементарных частиц.

2.7. Классификация простых компактных алгебр (групп) Ли

При использовании теории групп Ли в физических приложениях в дополнение к структуре (2.6.168), (2.6.170) компактных групп Ли необходимо знать, какими могут быть те простые компактные группы G_1, G_2, ..., которые входят в разложения (2.6.168), (2.6.170) в виде сомножителей.

В теории алгебр и групп Ли был получен замечательный результат, приводящий к полной классификации простых компактных алгебр Ли и соответствующих им простых компактных групп Ли. Эта класификация сводится к следующему утверждению.

Любая простая компактная алгебра Ли изоморфна либо одной из алгебр из четырех бесконечных серий так называемых классических алгебр Ли

$$A_l,\ (l \geq 1); \quad B_l,\ (l \geq 2); \quad C_l,\ (l \geq 3); \quad D_l,\ (l \geq 4), \tag{2.7.171}$$

либо одной из пяти исключительных (или особых) алгебр Ли:

$$G_2,\ \ F_4,\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8. \tag{2.7.172}$$

Индекс $l = 1, 2, ...$ у алгебр (2.7.171), так же как и индекс у каждой из алгебр (2.7.172), означает ранг соответствующей алгебры Ли.

Классическим алгебрам Ли (2.7.171) соответствуют четыре серии классических компактных групп Ли:

$$\begin{array}{lllll} & SU(n), & SO(n,R), & Sp\,(n), & SO(n,R) \\ \text{при} & n = l+1, & n = 2l+1, & n = 2l, & n = 2l \quad \text{соответственно.} \end{array} \tag{2.7.173}$$

Исключительным алгебрам Ли (2.7.172) соответствуют пять исключительных компактных групп Ли:

$$G_2,\ \ F_4,\ \ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8, \tag{2.7.174}$$

за которыми сохранены те же обозначения, что и для их алгебр Ли (2.7.172).

Группа $SU(n)$ представляет собой совокупность специальных (т. е. с равным 1 определителем) унитарных $n \times n$ - матриц U, которые, действуя в пространстве размерности n на векторы x с комплексными координатами x^i, $i = 1, 2, ..., n$, сохраняют инвариантным скалярное произведение вида $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x^i)^* y^i$ двух произвольных векторов x, y.

Группа $SO(n,R)$ представляет собой совокупность специальных (т. е. с равным 1 определителем) вещественных ортогональных $n \times n$ - матриц O, которые, действуя в пространстве четной или нечетной размерности n на векторы x с вещественными координатами x^i, $i = 1, 2, ..., n$, сохраняют инвариантным симметричное скалярное произведение вида $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ двух произвольных векторов x, y.

Группа $Sp\,(n)$ представляет собой совокупность $n \times n$ - матриц S, которые, действуя на векторы x в пространсте четного числа измерений n, сохраняют инвариантной некоторую антисимметричную билинейную форму $[x, y]$ двух произвольных векторов x, y.

Вещественные алгебры компактных групп $SU(n)$, $SO(n,R)$, $Sp\,(n)$ могут быть расширены до соответствующих им комплексных алгебр. Получаемым комплексным алгебрам соответствуют некомпактные группы $SL(n,C)$, $SO(n,C)$, $Sp\,(n,C)$.

Группа $SL(n,C)$ представляет собой совокупность специальных (т. е. с равным 1 определителем) комплексных $n \times n$ - матриц L, которые действуют в комплексном пространстве размерности n на векторы x с комплексными координатами x^i, $i = 1, 2, ..., n$.

Группа $SO(n,C)$ представляет собой совокупность специальных (т. е. с равным 1 определителем) комплексных ортогональных $n \times n$ - матриц O, которые действуют в пространстве четной или нечетной размерности n на векторы x с комплексными координатами x^i, $i = 1, 2, ..., n$.

Группа $Sp\,(n,C)$ представляет собой совокупность комплексных $n \times n$ - матриц S, которые действуют на комплексные векторы x в пространсте четного числа измерений n и сохраняют инвариантной антисимметричную билинейную форму $[x,y]$ двух произвольных векторов x, y.

Каждая из групп $SL(n,C)$, $SO(n,C)$, $Sp\,(n,C)$ имеет свои вещественные формы, из которых одна совпадает с компактной группой $SU(n)$, $SO(n,R)$, $Sp\,(n)$ соответственно.

Перечень простых компактных алгебр Ли и соответствующих им простых компактных групп Ли с указанием их комплексных расширений, вещественных форм и инвариантов приведен в таблице 1.

При некоторых низших рангах имеют место следующие изоморфизмы алгебр Ли и соответствующих им групп Ли:

$$A_1 \sim B_1 \sim C_1 \iff SU(2) \sim SO(3,R) \sim Sp\,(2), \tag{2.7.175}$$

$$B_2 \sim C_2 \iff SO(5,R) \sim Sp\,(4), \tag{2.7.176}$$

$$A_3 \sim D_3 \iff SU(4) \sim SO(6,R), \tag{2.7.177}$$

где символ $\sim$ обозначает изоморфизм алгебр Ли и соответствующих им групп Ли.

Таблица 1. Классические алгебры и группы Ли

A	Компактная группа G	Свойства матриц группы G	Комплексное расширение G' группы G	Вещественные формы группы G'	Инварианты
A_l	$SU(n)$ $n = l + 1$	$\left(U\right)^{+}U = I$ $det\, U = 1$	$SL(n, C)$	$SU(n)$ $SU(p, q)$ $p + q = n$ $SL(n, R)$ $SU^{*}(2n)$	$\sum_{i=1}^{n}(x^i)^{*}y^i$ $\sum_{i=1}^{p}(x^i)^{*}y^i -$ $- \sum_{j=p+1}^{n}(x^j)^{*}y^j$
B_l	$SO(n, R)$ $n = 2l + 1$	$\left(O\right)^{T}O = I$ $det\, O = 1$	$SO(n, C)$	$SO(n, R)$ $SO(p, q)$ $p + q = n$	$\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ $\sum_{i=1}^{p} x^i y^i -$ $- \sum_{j=p+1}^{n} x^j y^j$
C_l	$Sp\,(n)$ $n = 2l$		$Sp\,(n, C)$	$Sp\,(n)$ $Sp(n, R)$ $Sp(2p, 2q)$	$[x, y]$
D_l	$SO(n, R)$ $n = 2l$	$\left(O\right)^{T}O = I$ $det\, O = 1$	$SO(n, C)$	$SO(n, R)$ $SO(p, q)$ $p + q = n$ $SO^{*}(n)$	$\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ $\sum_{i=1}^{p} x^i y^i -$ $- \sum_{j=p+1}^{n} x^j y^j$

2.8. Некоторые общие свойства генераторов простых компактных групп Ли

Генераторы простых компактных групп Ли (2.7.173), (2.7.174) имеют ряд общих свойств, которые при определенном выборе базисов в алгебрах Ли этих групп можно представить в некотором простом виде.

Пусть G – простая компактная группа Ли, A – ее вещественная алгебра Ли и

$$a_i, \; i = 1, 2, ..., p \tag{2.8.178}$$

– некоторый базис в алгебре Ли A, в котором элементы алгебры Ли A имеют вид разложений (2.5.144).

Как показано в параграфе 2.5, в алгебре Ли A можно ввести билинейную форму $f(a, b)$ в виде (2.5.145), удовлетворяющую условиям симметричности (2.5.146), положительной определенности (2.5.147) и условию инвариантности, которое мы выберем в виде (2.3.89). Вид симметричной матрицы $f_{ij} = f(a_i, a_j)$, определяющей форму (2.5.145), зависит от выбора базиса (2.8.178).

Перейдем к новому базису a'_i, $i = 1, 2, ..., p$, связанному с базисом (2.8.178) соотношениями

$$a'_i = S_i^k\, a_k, \tag{2.8.179}$$

где S_i^k – матричные элементы матрицы S перехода от базиса (2.8.178) к базису (2.8.179).

Элементы алгебры Ли A с учетом базисов (2.8.178), (2.8.179) можно представить в виде разложений по этим базисам как

$$a = \alpha^i\, a_i = \alpha'^{\,i}\, a'_i, \;\; b = \beta^j\, a_j = \beta'^{\,j}\, a'_j, \quad a \in A,\, b \in A, \tag{2.8.180}$$

где α^i, β^j – вещественные координаты элементов a, b относительно базиса (2.8.178), а $\alpha'^{\,i}$, $\beta'^{\,j}$ – координаты этих элементов относительно базиса (2.8.179).

Учитывая свойства (2.3.83), (2.3.84) билинейной формы $f(a, b)$, для элементов (2.8.180) получаем билинейную форму в виде

$$f(a, b) = f_{ij}\, \alpha^i \beta^j = f'_{ij}\, \alpha'^{\,i},\; \beta'^{\,j}, \tag{2.8.181}$$

где

$$f'_{ij} = f(a'_i, a'_j) = S_i^k f_{kl} S_j^l \tag{2.8.182}$$

– матричные элементы матрицы f', определяющей форму $f(a, b)$ в базисе (2.8.179), а f_{kl} – матричные элементы матрицы f, определяющей эту форму в исходном базисе (2.8.178). Связь (2.8.182) между матрицами f' и f можно представить в матричном виде как

$$f' = S^T f\, S, \tag{2.8.183}$$

где S^T – матрица, транспонированная по отношению к матрице S, т. е. $S_i^k = (S^T)_k^i$.

Как известно, преобразованием подобия (2.8.183) симметричную матрицу f подходящим выбором матрицы S можно привести к диагональному виду

$$f'_{ij} = f'_i\, \delta_{ij}, \tag{2.8.184}$$

при этом диагональные матричные элементы f'_i положительны вследствие свойства (2.5.147) положительной определенности формы $f(a, b)$, т. е. $f'_i > 0$ для всех $i = 1, 2, ..., p$.

Тогда последующим переходом от базиса (2.8.179) к базисным элементам a''_i путем масштабного преобразования

$$a''_i = a'_i / \sqrt{f'_i}, \tag{2.8.185}$$

для матричных элементов f''_{ij} матрицы f'' формы $f(a, b)$ в базисе (2.8.185) с учетом (2.8.184) получаем выражение

$$f''_{ij} = f(a''_i, a''_j) = \delta_{ij}. \tag{2.8.186}$$

В дальнейшем мы будем использовать базис (2.8.185), в котором матрица инвариантной билинейной формы имеет вид (2.8.186), опуская при этом штриховые индексы у базисных элементов и у матрицы инвариантной билинейной формы.

Таким образом мы показали, что в алгебре Ли компактной группы Ли существует базис

$$a_i, \; i = 1, 2, ..., p, \tag{2.8.187}$$

в котором матрица инвариантной билинейной формы $f(a, b)$ имеет вид

$$f_{ij} = f(a_i, a_j) = \delta_{ij}. \tag{2.8.188}$$

Легко видеть, что в базисе (2.8.187), (2.8.188) структурные константы группы Ли являются полностью антисимметричными относительно перестановок любых пар индексов. Действительно, применяя условие инвариантности (2.3.89) к базисным элементам (2.8.187), (2.8.188), получаем равенства:

$$f([a_i, a_j], a_k) + f(a_j, [a_i, a_k]) = \tag{2.8.189}$$

$$= f(c^l_{ij}\, a_l, a_k) + f(a_j, c^m_{ik}\, a_m) = \tag{2.8.190}$$

$$= c^l_{ij}\, f(a_l, a_k) + c^m_{ik}\, f(a_j, a_m) = c^k_{ij} + c^j_{ik} = 0. \tag{2.8.191}$$

Последнее равенство в (2.8.191) является следствием равенства (2.8.188) и означает, что

$$c^j_{ik} = -c^k_{ij}, \tag{2.8.192}$$

т. е. что структурные константы c_{ij}^k с учетом их антисимметричности по нижним индексам антисимметричны относительно перестановок любых пар индексов.

В дальнейшем, для того чтобы отразить равноправие всех трех индексов у структурных констант c_{ij}^k, мы будем использовать обозначение

$$c_{ij}^k = c_{ij\,k}, \tag{2.8.193}$$

где

$$c_{ij\,k} = -c_{j\,i\,k} = -c_{i\,kj} = -c_{kj\,i} \tag{2.8.194}$$

– полностью антисимметричные структурные константы компактной группы Ли.

В этих обозначениях коммутационные соотношения (1.4.77) для генераторов a_i компактной группы Ли и коммутационные соотношения (1.7.143) для генераторов A_i ее линейного представления будем писать в виде

$$[a_i, a_j] = c_{ij\,k}\, a_k, \tag{2.8.195}$$

$$[A_i, A_j] = c_{ij\,k}\, A_k, \tag{2.8.196}$$

где $c_{ij\,k}$ – полностью антисимметричные структурные константы компактной группы Ли. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Пусть теперь T – неприводимое линейное представление компактной группы Ли. Введем оператор

$$C_T = -\sum_{l=1}^{p} A_l A_l. \tag{2.8.197}$$

Легко увидеть, используя свойство (2.8.194), что

$$[C_T, A_i] = 0. \tag{2.8.198}$$

Операторы, удовлетворяющие условию (2.8.198), называют операторами Казимира.

Из (2.8.198) с учетом (1.7.136) следует, что

$$[C_T, T_{g(\alpha)}] = 0, \tag{2.8.199}$$

где $T_{g(\alpha)}$ – матрица, соответствующая элементу $g(\alpha)$ группы Ли в представлении T. Поскольку T – неприводимое представление, то из (2.8.199) вследствие первой леммы Шура следует, что

$$C_T = -\sum_{l=1}^{p} A_l A_l = c_T\, I^{(T)}, \tag{2.8.200}$$

где $I^{(T)}$ – единичная матрица в представлении T, а c_T – собственное значение оператора Казимира (2.8.197) в представлении T.

Для фундаментального представления соотношение (2.8.200) имеет вид

$$-\sum_{l=1}^{p} a_l a_l = c_F\, I^{(F)}, \tag{2.8.201}$$

где $I^{(F)}$, c_T – единичная матрица и собственное значение оператора Казимира в фундаментальном представлении.

Для присоединенного представления соотношение (2.8.200) в матричном виде дает соотношение

$$-\sum_{l=1}^{p} P_{a_l} P_{a_l} = c_A\, I^{(A)} \tag{2.8.202}$$

или в подробной записи соотношение

$$-\sum_{l=1}^{p} (P_{a_l})^i_k (P_{a_l})^k_j = c_A\, \delta^i_j, \tag{2.8.203}$$

где $I^{(A)}$, c_A – единичная матрица и собственное значение оператора Казимира в присоединенном представлении.

Используя определение (2.2.50), обозначение (2.8.193) и свойство (2.8.194), из (2.8.203) получаем соотношение для структурных констант простой компактной группы в виде

$$c_{i\,k\,l}\, c_{j\,k\,l} = c_A\, \delta_{ij}. \tag{2.8.204}$$

Отметим, что, как легко видеть из (2.8.204), собственное значение оператора Казимира в присоединенном представлении положительно,

$$c_A > 0. \tag{2.8.205}$$

Получим полезные соотношения, содержащие шпуры генераторов представлений и шпуры произведений этих генераторов. Беря шпуры от левой и правой частей равенства (2.8.196) и принимая во внимание, что для матриц A_i конечной размерности шпуры их коммутаторов $Sp\,[A_i, A_j] = 0$, из (2.8.196) получаем равенство

$$c_{ij\,k}\, Sp\,(A_k) = 0. \tag{2.8.206}$$

Домножая равенство (2.8.206) на $c_{ij\,l}$ и суммируя результат по индексам i, j, с учетом (2.8.204), (2.8.205) из (2.8.206) получаем, что

$$Sp\,(A_l) = 0, \tag{2.8.207}$$

т. е. генераторы A_l, $l = 1, 2, ..., p$ любого линейного представления простой компактной группы Ли являются бесшпуровыми матрицами.

Рассмотрим теперь шпуры произведений генераторов представления T группы Ли. Элементам a, b, $c \in A$ алгебры Ли в представлении T соответствуют матрицы A, B, C, согласно соотношениям

$$a = \alpha^i\, a_i \to T_a = A = \alpha^i\, A_i, \tag{2.8.208}$$

$$b = \beta^j\, a_j \to T_b = B = \beta^j\, A_j, \tag{2.8.209}$$

$$c = \gamma^k\, a_k \to T_c = C = \gamma^k\, A_k, \tag{2.8.210}$$

где A_i, $i = 1, 2, ..., p$ – генераторы представления T, а α^i, β^j, γ^k – вещественные числа.

Множество матриц вида $A = \alpha^i\, A_i$ образуют алгебру A_T генераторов представления T группы Ли. В этой алгебре по аналогии с алгеброй генераторов группы Ли можно реализовать присоединенное представление алгебры Ли группы Ли. Для этого каждому элементу c алгебры Ли группы Ли сопоставим оператор $P_c(A)$, действующий на произвольный элемент $A \in A_T$ алгебры A_T через нахождение коммутатора согласно соотношению

$$c \to P_c(A) = [T_c, A] = [C, A]. \qquad (2.8.211)$$

Определение (2.8.211) обобщает введенное нами ранее определение (2.2.60) присоединенного представления, действующего в алгебре Ли группы Ли.

Действуя согласно (2.8.211) при $c = a_i$ на базисный элемент A_j алгебры A_T, получаем, что

$$P_{a_i}(A_j) = [T_{a_i}, A_j] = [A_i, A_j] = c_{ij}^k\, A_k = (P_{a_i})_j^k\, A_k, \qquad (2.8.212)$$

где матрица $(P_{a_i})_j^k$ совпадает с матрицей (2.2.50).

Используя алгебру A_T генераторов представления T групы Ли, можно в алгебре Ли группы Ли ввести билинейную форму

$$s_T(a, b) = -Sp\,(T_a T_b) = -Sp\,(AB) = s_{ij}^T\, \alpha^i \beta^j, \qquad (2.8.213)$$

где A, B – элементы (2.8.208), (2.8.209) алгебры A_T, а

$$s_{ij}^T = -Sp\,(A_i A_j) \qquad (2.8.214)$$

– матрица, соответствующая форме (2.8.214).

Можно убедиться, что форма (2.8.214) является инвариантной, т. е. удовлетворяет условию

$$s_T(P_c(a), b) + s_T(a, P_c(b)) = 0. \qquad (2.8.215)$$

Для этого достаточно преобразовать левую часть равенства (2.8.215) с помощью цепочки равенств:

$$s_T(P_c(a), b) + s_T(a, P_c(b)) = s_T([c, a], b) + s_T(a, [c, b]) = \qquad (2.8.216)$$

$$= -Sp\,(T_{[c,a]} T_b) - Sp\,(T_a T_{[c,b]}) = \qquad (2.8.217)$$

$$= -Sp\,([T_c, T_a] T_b + T_a [T_c, T_b]) = 0. \qquad (2.8.218)$$

Равенство (2.8.216) имеет место вследствие применения определения (2.2.60) к операциям $P_c(a)$ и $P_c(b)$, выражение (2.8.217) следует из предыдущего вследствие определения (2.8.213) формы $s_T(a, b)$, первое выражение в (2.8.218) следует из предыдущего вследствие свойства (2.2.41) матриц $T_{[c,a]}\ T_{[c,b]}$ представления T алгебры Ли, равенство нулю в (2.8.218) происходит в результате раскрытия коммутаторов и использования возможности циклических перестановок матриц под знаком шпура.

Поскольку группа G простая и компактная, то вследствие теоремы 2.4 инвариантная билинейная форма (2.8.213) может только числовым множителем отличаться от инвариантной билинейной формы $f(a,b)$ с матрицей (2.8.188), т. е.

$$s^T_{ij} = s_T\,\delta_{ij}, \tag{2.8.219}$$

где s_T – произвольный числовой множитель.

Из (2.8.214), (2.8.219) получаем следующие равенства для шпуров произведений генераторов представления простой компактной группы:

$$-Sp\,(A_i A_j) = s_T\,\delta_{ij}. \tag{2.8.220}$$

Между константами c_T, s_T имеется соотношение

$$c_T\,N_T = s_T\,p, \tag{2.8.221}$$

где N_T – размерность представления T. Соотношение (2.8.221) следует из (2.8.200) в результате взятия от (2.8.200) шпура и использования соотношения (2.8.220). Для присоединенного представления $N_A = p$ и, как следует из (2.8.221), $c_A = s_A$.

Как было отмечено в параграфе 1.6, линейные представления компактной группы Ли эквивалентны унитарным. Имея это в виду, целесообразно вместо генераторов A_i представления T группы Ли ввести генераторы T_i путем соотношений

$$A_i = i\,T_i. \tag{2.8.222}$$

Для унитарных представлений вследствие условия (1.7.145) генераторы T_i будут эрмитовыми, т. е. удовлетворять условию

$$\big(T_i\big)^+ = T_i. \tag{2.8.223}$$

В частности, для фундаментального представления имеем аналогичные (2.8.222), (2.8.223) соотношения:

$$a_i = i\,t_i, \tag{2.8.224}$$

$$\big(\,t_i\,\big)^+ = t_i. \tag{2.8.225}$$

Для удобства использования приведем с учетом определений (2.8.222), (2.8.224) наиболее часто используемые формулы (1.3.72), (1.7.136), (2.8.195), (2.8.196), (2.8.200), (2.8.201), (2.8.204), (2.8.207), (2.8.220) в виде

$$g(\alpha) = g(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p\,) = e^{i\,\alpha^i\,t_i}, \tag{2.8.226}$$

$$T_{g(\alpha)} = T(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p\,) = e^{i\,\alpha^i\,T_i}, \tag{2.8.227}$$

$$[t_i, t_j] = i\,f_{ij\,k}\,t_k, \tag{2.8.228}$$

$$[T_i, T_j] = i\,f_{ij\,k}\,T_k, \tag{2.8.229}$$

$$C_T = \sum_{l=1}^{p} T_l\,T_l = c_T\,I^{(T)}, \tag{2.8.230}$$

$$\sum_{l=1}^{p} t_l\,t_l = c_F\,I^{(F)}, \tag{2.8.231}$$

$$f_{i\,k\,l}\,f_{j\,k\,l} = c_A\,\delta_{ij}, \tag{2.8.232}$$

$$Sp\,(T_l) = 0, \tag{2.8.233}$$

$$Sp\,(T_i\,T_j) = s_T\,\delta_{ij}. \tag{2.8.234}$$

В формулах (2.8.228), (2.8.229), (2.8.232) $f_{ij\,k} = -c_{ij\,k}$ – полностью антисимметричные структурные константы f простой компактной группы Ли.

Глава III

Краткий обзор классических групп Ли

3.1. Группы унитарных матриц

Матрица $\mathcal{U}$ называется унитарной, если она удовлетворяет условию

$$\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^{-1}, \tag{3.1.1}$$

где $\mathcal{U}^+$ – матрица, эрмитово сопряженная к матрице $\mathcal{U}$.

Условие (3.1.1) можно записать в эквивалентном виде:

$$\mathcal{U}^+ \mathcal{U} = \mathcal{U} \mathcal{U}^+ = I. \tag{3.1.2}$$

Множество $n \times n$ - комплексных матриц, удовлетворяющих условию (3.1.2), образуют группу унитарных матриц $U(n)$.

Определим число независимых вещественных параметров группы $U(n)$. Произвольная комплексная $n \times n$ - матрица $\mathcal{U}$ содержала бы $2n^2$ независимых вещественных параметров. Левая часть матричного уравнения (3.1.2) при произвольной комплексной матрице $\mathcal{U}$ является эрмитовой, т. е. имеет независимыми n вещественных выражений на диагонали и $(n^2 - n)/2$ комплексных выражений в, например, правом от диагонали верхнем треугольнике этой матрицы. Следовательно, матричное уравнение (3.1.2) эквивалентно системе $n+2(n^2-n)/2 = n^2$ вещественных уравнений для $2n^2$ вещественных параметров. В результате из $2n^2$ вещественных параметров независимыми остаются $2n^2 - n^2 = n^2$ вещественных параметров. Таким образом, группа унитарных матриц $U(n)$ имеет

$$p_{U(n)} = n^2 \tag{3.1.3}$$

независимых вещественных параметров.

Учитывая, что для произвольной матрицы A справедливо равенство

$$det\left(A^T\right) = det\, A, \tag{3.1.4}$$

из (3.1.2) получаем, что

$$\left|det\mathcal{U}\right|^2 = 1, \tag{3.1.5}$$

т. е.

$$det\mathcal{U} = e^{i\,n\,\varphi}, \tag{3.1.6}$$

где φ – вещественная фаза, а размерность n введена здесь для согласованности выражения (3.1.6) с последующими формулами.

Таким образом, унитарную матрицу $\mathcal{U}$ из группы $U(n)$ можно представить в виде

$$\mathcal{U} = e^{i\,\varphi}\,U, \tag{3.1.7}$$

где U – $n \times n$ - комплексная матрица, удовлетворяющая условиям

$$U^+\,U = I, \tag{3.1.8}$$

$$det\,U = 1. \tag{3.1.9}$$

Множество $n \times n$ - комплексных матриц, удовлетворяющих условиям (3.1.8), (3.1.9), образуют группу специальных (т. е. с определителем, равным 1) унитарных матриц $SU(n)$.

Как показано выше, унитарная матрица, удовлетворяющая только условию вида (3.1.2), имеет вид (3.1.7) и содержит n^2 независимых вещественных параметров, одним из которых является вещественная фаза φ. Параметр φ определяет детерминант матрицы согласно (3.1.6), и дополнительное к (3.1.2) условие равенства детерминанта матрицы единице означает фиксирование одного вещественного параметра φ значением $\varphi = 0$. Следовательно, унитарная матрица, удовлетворяющая условиям (3.1.8) и (3.1.9) одновременно, содержит $n^2 - 1$ независимых вещественных параметров. Таким образом, группа специальных унитарных матриц $SU(n)$ имеет

$$p_{SU(n)} = n^2 - 1 \tag{3.1.10}$$

независимых вещественных параметров.

Матрицы группы $SU(n)$ можно представить в виде

$$U = e^{i\,\alpha^i\,t_i}, \tag{3.1.11}$$

где α^i, $i = 1, 2, ..., n^2 - 1$ – вещественные параметры, а генераторы t_i удовлетворяют условиям

$$t_i^+ = t_i, \tag{3.1.12}$$

$$Sp\,t_i = 0, \tag{3.1.13}$$

т. е. являются эрмитовыми матрицами с нулевым шпуром.

Условие (3.1.13) легко получить, применяя к (3.1.11) несложно доказываемое для произвольной матрицы A конечной размерности равенство

$$det\left(e^{A}\right) = e^{Sp\,A} \tag{3.1.14}$$

и учитывая произвольность независимых параметров α^i.

Отметим, что условие (3.1.13) бесшпуровости генераторов группы $SU(n)$ непосредственно связано с условием (3.1.9) равенства единице определителя матриц группы $SU(n)$.

Обычно генераторы группы $SU(n)$ выбирают так, чтобы

$$Sp\,(t_i\,t_j) = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}, \tag{3.1.15}$$

т. е. выбирая нормировочный множитель s_T в (2.8.234) для генераторов фундаментального представления группы $SU(n)$ равным $s_F = 1/2$.

Генераторы фундаментального представления группы $SU(n)$ удовлетворяют коммутационным и антикоммутационным соотношениям вида

$$[t_i, t_j] = i\,f_{ij\,k}\,t_k, \tag{3.1.16}$$

$$\{t_i, t_j\} = d_{ij\,k}\,t_k + \frac{1}{n}\,\delta_{ij}\,I, \tag{3.1.17}$$

где вследствие условия (3.1.15) $f_{ij\,k}$ – полностью антисимметричные структурные константы, а $d_{ij\,k}$ – полностью симметричные d - константы группы $SU(n)$, I – единичная матрица в фундаментальном представлении группы $SU(n)$, для антикоммутатора двух матриц A и B используется обозначение $\{A, B\} = AB + BA$.

Соотношение (3.1.16) является обычным коммутационным соотношением для генераторов группы $SU(n)$. Соотношение (3.1.17) является следствием того, что генераторы t_i, $i = 1, 2, ..., n^2 - 1$ и единичная матрица I образуют полный набор из n^2 линейно независимых матриц, по которому можно разложить любую $n \times n$ - матрицу; для антикоммутатора $\{t_i, t_j\}$ такое разложение можно записать в виде (3.1.17). Коэффициент перед единичной матрицей легко определяется взятием шпура от обеих частей равенства (3.1.17) с последующим учетом равенства (3.1.15).

Входящие в соотношения (3.1.16), (3.1.17) f - и d - константы группы $SU(n)$ играют важную роль в теории унитарных матриц и ее приложений в физике.

Для фундаментального и присоединенного представлений группы $SU(n)$ соотношения (2.8.231), (2.8.232) принимают вид

$$\sum_{l=1}^{n^2-1} t_l\, t_l = c_F\, I, \tag{3.1.18}$$

$$f_{i\,k\,l}\, f_{j\,k\,l} = c_A\, \delta_{ij}. \tag{3.1.19}$$

При условии (3.1.15) входящие в (3.1.18), (3.1.19) собственные значения операторов Казимира в фундаментальном и присоединенном представлениях группы $SU(n)$ равны

$$c_F = \frac{n^2 - 1}{2n}, \tag{3.1.20}$$

$$c_A = n. \tag{3.1.21}$$

Матричные элементы генераторов группы $SU(n)$ удовлетворяют так называемому соотношению полноты, которое можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n^2-1} \left(t_i\right)_{\alpha\beta} \left(t_i\right)_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\delta}\, \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{n}\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\gamma\delta} \right), \tag{3.1.22}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, ..., n$.

Для доказательства соотношения (3.1.22) предварительно введем в дополнение к генераторам t_i, $i = 1, 2, ..., n^2 - 1$ матрицу

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{2n}}\, I. \tag{3.1.23}$$

Тогда условие (3.1.15) допускает обобщение и на матрицу (3.1.23) в виде

$$Sp\,(t_\mu\, t_\nu) = \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}, \tag{3.1.24}$$

где каждый индекс принимает n^2 значений $\mu, \nu = 0, 1, 2, ..., n^2 - 1$.

Матрицы t_μ, $\mu = 0, 1, 2, ..., n^2 - 1$ образуют полный набор из n^2 линейно независимых матриц, по которому можно разложить любую $n \times n$ - матрицу. Пусть M – произвольная $n \times n$ - матрица. Разложим ее по матрицам t_μ в виде

$$M = \sum_{\mu=0,1,...}^{n^2-1} m_\mu\, t_\mu. \tag{3.1.25}$$

Коэффициенты m_μ разложения (3.1.25) с помощью соотношения (3.1.24) выражаются через матрицу M в виде

$$m_\mu = 2\,Sp\,\big(M t_\mu\big). \tag{3.1.26}$$

Подставляя (3.1.26) в (3.1.25), получаем тождественное по матричным элементам матрицы M равенство

$$M = \sum_{\mu=0,1,...}^{n^2-1} 2\,Sp\,\big(M t_\mu\big)\, t_\mu, \tag{3.1.27}$$

которое в более подробной записи имеет вид

$$M_{\gamma\delta} = M_{\beta\alpha} \sum_{\mu=0,1,...}^{n^2-1} 2\,\big(t_\mu\big)_{\alpha\beta}\,\big(t_\mu\big)_{\gamma\delta}. \tag{3.1.28}$$

Равенство (3.1.28) должно выполняться тождественно по произвольным матричным элементам матрицы M, для этого должно выполняться равенство

$$\sum_{\mu=0,1,...}^{n^2-1} \big(t_\mu\big)_{\alpha\beta}\,\big(t_\mu\big)_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma}. \tag{3.1.29}$$

Выделяя в (3.1.29) слагаемое с t_0, перенося его в правую часть равенства (3.1.29) и учитывая вид (3.1.23) матрицы t_0, мы приходим к соотношению (3.1.22).

Принято наряду с генераторами t_i группы $SU(n)$ вводить матрицы λ_i, связанные с t_i соотношениями

$$t_i = \frac{1}{2}\,\lambda_i. \tag{3.1.30}$$

Соотношения (3.1.15), (3.1.16), (3.1.17), (3.1.22) в терминах λ - матриц принимают вид

$$Sp\,(\lambda_i\,\lambda_j) = 2\,\delta_{ij}, \tag{3.1.31}$$

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2\,i\,f_{ij\,k}\,\lambda_k, \tag{3.1.32}$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2\,d_{ij\,k}\,\lambda_k + \frac{4}{n}\,\delta_{ij}\,I, \tag{3.1.33}$$

$$\sum_{i=1}^{n^2-1} \left(\lambda_i\right)_{\alpha\beta}\left(\lambda_i\right)_{\gamma\delta} = 2\left(\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{n}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta}\right). \tag{3.1.34}$$

3.2. Некоторые свойства матриц групп $SU(2)$, $U(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$

В данном параграфе обсудим более подробно некоторые свойства генераторов и матриц групп $SU(2)$, $U(2)$, $SU(3)$, $SU(4)$.

3.2.1 Генераторы и матрицы групп $SU(2)$, $U(2)$. $U(2)$ - дублеты и их свойства

Генераторами группы $SU(2)$ являются матрицы

$$t_i = \frac{1}{2}\,\tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.2.35}$$

где

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.2.36}$$

– матрицы Паули. Матрицы (3.2.36) были впервые в физике введены В. Паули для описания спиновых состояний электрона и в этом случае обозначаются как $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно.

Непосредственными выкладками легко проверить, что матрицы Паули (3.2.36) удовлетворяют коммутационным и антикоммутационным соотношениям в виде

$$[\tau_i, \tau_j] = 2\, i\, \varepsilon_{ij\,k}\, \tau_k, \tag{3.2.37}$$

$$\{\tau_i, \tau_j\} = 2\, \delta_{ij}\, I, \tag{3.2.38}$$

где $\varepsilon_{ij\,k}$ – полностью антисимметричный символ, $\varepsilon_{123} = 1$. Из (3.2.37), (3.2.38) видно, что константы $f_{ij\,k}$ группы $SU(2)$ совпадают с $\varepsilon_{ij\,k}$, а d- константы группы $SU(2)$ равны нулю, $d_{ij\,k} = 0$.

Из (3.2.37), (3.2.38) следует для матриц Паули соотношение

$$\tau_i\, \tau_j = \delta_{ij}\, I + i\, \varepsilon_{ij\,k}\, \tau_k. \tag{3.2.39}$$

Матрицу конечных преобразований из группы $SU(2)$ можно представить в виде

$$U = e^{i\,\alpha^i\, t_i} = e^{\frac{i}{2}\,\alpha^i\,\tau_i} = I\, \cos(\alpha/2) + i\,(n^i \tau_i)\, \sin(\alpha/2), \tag{3.2.40}$$

где результат получается непосредственно суммированием ряда матричной экспоненты с учетом свойства (3.2.39) матриц Паули, α^i – вещественные параметры преобразований, $\alpha = \sqrt{\Sigma_i (\alpha^i)^2}$, $n^i = \alpha^i/\alpha$.

Приведем еще одну параметризацию матрицы конечных преобразований из группы $SU(2)$ в виде

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{i\,\varphi_1} & \sin\theta\ e^{i\,\varphi_2} \\ -\sin\theta\ e^{-i\,\varphi_2} & \cos\theta\ e^{-i\,\varphi_1} \end{pmatrix}, \tag{3.2.41}$$

где тремя параметрами являются угол θ и две фазы φ_1 и φ_2.

В этой параметризации матрица конечных преобразований из группы $U(2)$ будет иметь вид

$$\mathcal{U} = e^{i\,\varphi} \begin{pmatrix} \cos\theta\ e^{i\,\varphi_1} & \sin\theta\ e^{i\,\varphi_2} \\ -\sin\theta\ e^{-i\,\varphi_2} & \cos\theta\ e^{-i\,\varphi_1} \end{pmatrix} = e^{i\,\varphi}\, U, \tag{3.2.42}$$

т. е. имеет дополнительную по сравнению с (3.2.41) фазу φ, при этом $det\,\mathcal{U} = e^{-i\,2\,\varphi}$.

Рассмотрим фундаментальный дублет группы $U(2)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \tag{3.2.43}$$

преобразующийся относительно группы $U(2)$ по формуле

$$\Phi \to \Phi' = \mathcal{U}\,\Phi = e^{i\,\varphi}\,U\,\Phi. \tag{3.2.44}$$

Построим из компонент дублета (3.2.43) дублет

$$\tilde{\Phi} = \varepsilon\,\Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix}, \tag{3.2.45}$$

где ε – антисимметричная матрица вида

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.46}$$

$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$, $\varepsilon = -\varepsilon^T = -\varepsilon^{-1}$.

Преобразование (3.2.44) вызывает преобразование дублета (3.2.45) в виде

$$\tilde{\Phi} \to \tilde{\Phi}' = \varepsilon\,\Phi^{*\prime} = \varepsilon\,\mathcal{U}^*\,\varepsilon^{-1}\,\tilde{\Phi}. \tag{3.2.47}$$

Как легко убедиться непосредственными выкладками, для произвольной 2×2 - матрицы $\mathcal{U}$ справедливо равенство

$$\mathcal{U}^+\,\varepsilon\,\mathcal{U}^*\,\varepsilon^{-1} = det\,\mathcal{U}^*\,I, \tag{3.2.48}$$

из которого для унитарной матрицы $\mathcal{U}$ следует соотношение

$$\varepsilon\,\mathcal{U}^*\,\varepsilon^{-1} = det\,\mathcal{U}^*\,\mathcal{U}, \tag{3.2.49}$$

в результате чего преобразование (3.2.47) принимает вид

$$\tilde{\Phi} \to \tilde{\Phi}' = det\,\mathcal{U}^*\,\mathcal{U}\,\tilde{\Phi} = e^{-i\,\varphi}\,U\,\Phi. \tag{3.2.50}$$

Преобразование (3.2.50) отличается от (3.2.44) лишь фазовым множителем, в случае группы $SU(2)$ $\varphi = 0$ и преобразования (3.2.44) и (3.2.50) дублетов (3.2.43) и (3.2.45) совпадают.

Рассмотрим теперь два дублета:

$$\Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ \Phi_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(2)} \\ \Phi_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{3.2.51}$$

каждый из которых преобразуется по формуле (3.2.44), т. е. как

$$\varPhi^{(\beta)} \to \varPhi^{(\beta)\prime} = \mathcal{U}\,\varPhi^{(\beta)} = e^{i\,\varphi}\,U\,\varPhi^{(\beta)},\ \ \beta = 1, 2. \tag{3.2.52}$$

Отметим, что преобразования (3.2.52) оставляют инвариантным выражение

$$I(\varPhi^{(1)}, \varPhi^{(2)}) = \varPhi^{(1)+}\varPhi^{(2)}. \tag{3.2.53}$$

Объединив дублеты (3.2.51) в матрицу

$$\hat{\varPhi} = \begin{pmatrix} \varPhi_1^{(1)} & \varPhi_1^{(2)} \\ \varPhi_2^{(1)} & \varPhi_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{3.2.54}$$

преобразования (3.2.52), как легко проверить, можно представить в виде

$$\hat{\varPhi} \to \hat{\varPhi}' = \mathcal{U}\,\hat{\varPhi} = e^{i\,\varphi}\,U\,\hat{\varPhi}. \tag{3.2.55}$$

Из (3.2.55) следует, что составленное из компонент дублетов (3.2.51) выражение

$$d(\varPhi^{(1)}, \varPhi^{(2)}) = \varPhi_1^{(1)}\varPhi_2^{(2)} - \varPhi_2^{(1)}\varPhi_1^{(2)} = det\,\hat{\varPhi} \tag{3.2.56}$$

при преобразованиях (3.2.52) преобразуется как

$$d(\varPhi^{(1)}, \varPhi^{(2)}) \to d(\varPhi^{(1)\prime}, \varPhi^{(2)\prime}) = \tag{3.2.57}$$

$$= det\,\mathcal{U}\ d(\varPhi^{(1)}, \varPhi^{(2)}) = e^{i\,2\,\varphi}\,d(\varPhi^{(1)}, \varPhi^{(2)}). \tag{3.2.58}$$

В случае группы $SU(2)$ $\varphi = 0$, и выражение (3.2.56) является инвариантом группы $SU(2)$. Отметим, что при наличии лишь одного дублета $\varPhi^{(1)} = \varPhi^{(2)} = \varPhi$ инвариант (3.2.56), в отличие от инварианта (3.2.53), равен нулю.

3.2.2 Генераторы, f - и d - константы группы $SU(3)$

Генераторами группы $SU(3)$ являются матрицы

$$t_i = \frac{1}{2}\,\lambda_i,\ \ i = 1, 2, ..., 8, \tag{3.2.59}$$

где

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.2.60)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.2.61)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3.2.62)$$

– матрицы Гелл-Манна. Матрицы (3.2.60), (3.2.61), (3.2.62) были введены М. Гелл-Манном при описании $SU_f(3)$ - симметрии адронов, приведшей в итоге к предсказанию кварков.

Матрицы Гелл-Манна (3.2.60)–(3.2.62) удовлетворяют соотношениям

$$Sp\,(\lambda_i\,\lambda_j) = 2\,\delta_{ij}, \qquad (3.2.63)$$

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2\,i\,f_{ij\,k}\,\lambda_k, \qquad (3.2.64)$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2\,d_{ij\,k}\,\lambda_k + \frac{4}{3}\,\delta_{ij}\,I, \qquad (3.2.65)$$

$$\sum_{i=1}^{8} \big(\lambda_i\big)_{\alpha\beta}\,\big(\lambda_i\big)_{\gamma\delta} = 2\,\big(\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{3}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta}\,\big). \qquad (3.2.66)$$

Входяшие в (3.2.64) структурные константы группы $SU(3)$ $f_{ij\,k}$ полностью антисимметричны, и их независимые, отличные от нуля значения равны

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2\,, \qquad (3.2.67)$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2\,. \qquad (3.2.68)$$

Содержащиеся в (3.2.65) d - константы группы $SU(3)$ $d_{ij\,k}$ полностью симметричны, и их независимые, отличные от нуля значения равны:

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3}\,, \tag{3.2.69}$$

$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = -d_{778} = -1/(2\sqrt{3})\,, \tag{3.2.70}$$

$$\begin{aligned} &d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = \\ &= d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = 1/2\,. \end{aligned} \tag{3.2.71}$$

3.2.3 Генераторы группы $SU(4)$

Генераторами группы $SU(4)$ являются матрицы

$$t_i = \frac{1}{2}\lambda_i, \quad i = 1, 2, ..., 15, \tag{3.2.72}$$

где первые восемь λ - матриц даются выражениями

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \lambda_i' & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., 8, \tag{3.2.73}$$

где λ_i', $1 = 1, 2, ..., 8$ – матрицы Гелл-Манна (3.2.60)–(3.2.62), а последующие λ - матрицы имеют вид

$$\lambda_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.74}$$

$$\lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.75}$$

$$\lambda_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.76}$$

$$\lambda_{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \tag{3.2.77}$$

λ - матрицы (3.2.73)–(3.2.77) группы $SU(4)$ удовлетворяют соотношениям (3.1.31)–(3.1.34) при $n = 4$.

3.3. Группы ортогональных матриц

Рассмотрим n - мерное линейное векторное пространство и обозначим через x^i, $i = 1, 2, ..., n$ координаты векторов этого пространства в некотором базисе. Введем в этом пространстве линейные преобразования

$$x^i \to x'^i = L^i_k \, x^k, \tag{3.3.78}$$

представив их и в матричном виде как

$$x \to x' = L\, x, \tag{3.3.79}$$

где x, x' – столбцы из координат векторов, L – матрица соответствующего преобразования.

Введем билинейную форму $h(x, y)$, составленную из координат двух векторов x, y, в виде

$$h(x, y) = h_{ij} \, x^i y^j, \tag{3.3.80}$$

где h_{ij} – матричные элементы матрицы h, задающей эту форму. Мы будем предполагать, что определитель матрицы h отличен от нуля, т. е. что

$$det\, h \neq 0. \tag{3.3.81}$$

Потребуем, чтобы преобразования (3.3.79) оставляли форму (3.3.80) инвариантной, т. е. чтобы имело место соотношение

$$h(x,y) \to h(x',y') = h(x,y) \tag{3.3.82}$$

для любых векторов x и y. Тогда из (3.3.82) следует условие на матрицу L в виде

$$L^T\, h\, L = h, \tag{3.3.83}$$

где L^T – матрица, транспонированная по отношению к L.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица h является симметричной, т. е.

$$h^T = h. \tag{3.3.84}$$

Конкретный вид матрицы h зависит от выбора базиса, при этом симметричную матрицу h подходящим выбором базиса (включающим в себя и масштабное преобразование базисных векторов) можно привести к виду

$$h_{ij} = \delta_{ij}. \tag{3.3.85}$$

В случае матрицы (3.3.85) равенство (3.3.83) можно представить в виде

$$O^T\, O = I, \tag{3.3.86}$$

где для обозначения матриц, удовлетворяющих условию (3.3.86), вместо буквы L мы ввели обозначение O. Матрицы O, удовлетворяющие условию (3.3.86), называются ортогональными и образуют группу $O(n)$. Соответствующие им преобразования оставляют инвариантной диагональную форму

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{3.3.87}$$

С учетом равенства (3.1.4) из (3.3.86) следует, что $\big(det\, O\big)^2 = 1$, т. е.

$$det\, O = \pm 1. \tag{3.3.88}$$

Матрицы O, удовлетворяющие условию (3.3.86) и условию

$$det\, O = 1, \tag{3.3.89}$$

называются специальными ортогональными матрицами и образуют группу $SO(n)$. Вещественные матрицы O, удовлетворяющие условиям (3.3.86), (3.3.89), образуют группу $SO(n, R)$. Возможны комплексные матрицы O, удовлетворяющие условиям (3.3.86), (3.3.89), которые образуют группу $SO(n, C)$.

Определим число независимых вещественных параметров группы $SO(n, R)$. Сначала определим число независимых вещественных параметров группы $O(n, R)$. Произвольная вещественная $n \times n$ - матрица O содержала бы n^2 независимых вещественных параметров. Левая часть матричного уравнения (3.3.86) при произвольной вещественная матрице O является симметричной, т. е. имеет независимыми n вещественных выражений на диагонали и $(n^2 - n)/2$ вещественных выражений в, например, правом от диагонали верхнем треугольнике этой матрицы. Следовательно, матричное уравнение (3.3.86) эквивалентно системе $n + (n^2 - n)/2 = (n^2 + n)/2$ вещественных уравнений для n^2 вещественных параметров. В результате из n^2 вещественных параметров независимыми остаются $n^2 - (n^2 + n)/2 = (n^2 - n)/2$ вещественных параметров, т. е. группа $O(n, R)$ имеет $(n^2 - n)/2$ независимых вещественных параметров. Условие (3.3.88) является следствием матричного уравнения (3.3.86), и условие (3.3.89) не изменяет следующее из (3.3.86) число независимых параметров. Таким образом, группа $SO(n, R)$ имеет

$$p_{SO(n,R)} = (n^2 - n)/2 \tag{3.3.90}$$

независимых вещественных параметров.

Укажем свойства генераторов группы $SO(n, R)$. Матрицы O группы $SO(n, R)$ можно представить в виде

$$O = e^{\alpha^i\, a_i}, \tag{3.3.91}$$

где α^i, $i = 1, 2, ..., (n^2 - n)/2$ – вещественные параметры.

Ограничиваясь в (3.3.91) первыми двумя членами разложения экспоненты в ряд, из условия (3.3.86) в первом порядке по параметрам α^i получаем, что

$$(a_i)^T = -\,a_i, \qquad (3.3.92)$$

т. е. генераторы a_i, $i = 1, 2, ..., (n^2 - n)/2$ группы $SO(n, R)$ являются антисимметричными вещественными матрицами. Отметим, что поскольку антисимметричные матрицы имеют нулевые шпуры, то условие (3.3.89) для матриц вида (3.3.91), (3.3.92) вследствие (3.1.14) автоматически выполняется, т. е., как отмечалось выше, условие (3.3.89) не дает дополнительного ограничения на параметры группы.

В качестве примера приведем генераторы a_i, $i = 1, 2, 3$ группы $SO(3, R)$, которые можно выбрать в виде $(a_i)_{j\,k} = \varepsilon_{ij\,k}$, где $\varepsilon_{ij\,k}$ – полностью антисимметричный символ, $\varepsilon_{123} = 1$, т. е. в виде

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.3.93)$$

Генераторы (3.3.93) удовлетворяют соотношениям

$$[a_i, a_j] = -\,\varepsilon_{ij\,k}\, a_k, \qquad (3.3.94)$$

$$-\sum_{l=1}^{3} a_l a_l = 2\, I. \qquad (3.3.95)$$

3.4. Группы симплектических матриц

В предыдущем параграфе мы рассмотрели случай (3.3.84), когда форма (3.3.80) задается симметричной матрицей, приводимой к виду (3.3.85), и в результате получили в качестве группы пребразований, сохраняющих форму $h(x, y)$, группу $SO(n, R)$.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица h является антисимметричной, т. е.

$$h^T = -\,h. \qquad (3.4.96)$$

Из условия (3.4.96) получаем равенства

$$det\,(h^T) = det\, h = det\,(-\,h) = (-1)^n\, det\, h, \qquad (3.4.97)$$

где первое из них является следствием равенства (3.1.4), второе – следствием условия (3.4.96) и третье – результатом раскрытия определителя. Из (3.4.97) при условии (3.3.81) следует, что форма (3.3.80) с невырожденной в смысле условия (3.3.81) антисимметричной матрицей (3.4.96) возможна только в пространстве четной размерности

$$n = 2n', \tag{3.4.98}$$

где $n' = 1, 2, 3, ...$ – любое целое число.

Как и в случае (3.3.84), конкретный вид матрицы (3.4.96) зависит от выбора базиса. Оказывается, антисимметричную матрицу (3.4.96) подходящим выбором базиса можно привести к виду

$$h = \begin{pmatrix} 0 & I' \\ -I' & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.99}$$

где

$$I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4.100}$$

– единичная $n' \times n'$ - матрица.

Отметим, что при другом подходящем выборе базиса антисимметричную матрицу (3.4.96) можно привести к виду

$$h = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.101}$$

где σ – симметричная антидиагональная $n' \times n'$ - матрица вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.102}$$

В дальнейшем мы будем использовать матрицу (3.4.96) в виде (3.4.99), (3.4.100).

Матрицы S, удовлетворяющие условию

$$S^T\, h\, S = h, \tag{3.4.103}$$

где матрица h имеет вид (3.4.99), (3.4.100), называются симплектическими и образуют группу $Sp(n)$.

Матричные элементы матрицы (3.4.99) удобно нумеровать парными индексами как $h_{\alpha i', \beta j'}$, где индексы $\alpha, \beta = 1, 2$ нумеруют блоки в матрице (3.4.99), а индексы $i', j' = 1, 2, ..., n'$ нумеруют матричные элементы в каждом из блоков. Из вида матриц (3.4.99), (3.4.100) следует , что

$$h_{\alpha i', \beta j'} = \varepsilon_{\alpha \beta} \delta_{i' j'}, \tag{3.4.104}$$

где $\varepsilon_{\alpha \beta}$ – антисимметричный символ, $\varepsilon_{1,2} = -\varepsilon_{2,1} = 1, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Координаты вектора x также удобно нумеровать парным индексом как $x^{\alpha i'}$.

В этих обозначениях форма (3.3.80), (3.4.99), (3.4.100) принимает вид

$$h(x, y) = \sum_{i'=1}^{n'} \left(x^{1 i'} y^{2 i'} - x^{2 i'} y^{1 i'} \right) \equiv [x, y] \tag{3.4.105}$$

и является инвариантом преобразований группы симплектических матриц $Sp(n)$. Отметим, что форма (3.4.105) антисимметрична относительно перестановки векторов x и y, $\quad h(y, x) = -h(x, y)$, что подчеркивается иногда используемым для нее обозначением $[x, y]$.

Определим общую структуру генераторов группы $Sp(n)$. Принимая во внимание вид (3.4.99) матрицы h, представим матрицу S в виде

$$S = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}, \tag{3.4.106}$$

где A', B', C', D' – $n' \times n'$ - матрицы.

Подставляя матрицу (3.4.106) в условие (3.4.103), с учетом (3.4.99), (3.4.100) из (3.4.103) получаем матричные уравнения

$$(A')^T C' - (C')^T A' = 0, \qquad (A')^T D' - (C')^T B' = I', \tag{3.4.107}$$

$$(B')^T C' - (D')^T A' = -I', \qquad (B')^T D' - (D')^T B' = 0 \tag{3.4.108}$$

для матриц A', B', C', D'.

Матрицу S можно представить в виде

$$S = e^{\alpha^i\, a_i} = e^a \approx \tag{3.4.109}$$

$$\approx I + a + ... \approx \begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & I' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + ... , \tag{3.4.110}$$

где $a = \alpha^i\, a_i$; a_i, $i = 1, 2, ..., p$ – генераторы, α^i – вещественные параметры, a', b', c', d' – $n' \times n'$ - матрицы, содержащие малые параметры α^i.

Из разложения (3.4.110) следуют приближенные с точностью до первого порядка малости по параметрам α^i матричные равенства

$$A' \approx I' + a' + ... , \qquad B' \approx b' + ... , \tag{3.4.111}$$

$$C' \approx c' + ... , \qquad D' \approx I' + d' + ... , \tag{3.4.112}$$

после подстановки которых в (3.4.107), (3.4.108) из (3.4.107), (3.4.108) получаем условия на матрицы a', b', c', d' в виде

$$c' - (\, c'\,)^T = 0, \quad (\, a'\,)^T + d' = 0, \quad (\, b'\,)^T - b' = 0. \tag{3.4.113}$$

Из условий (3.4.113) следует, что генераторы a_i в (3.4.109), (3.4.110) определяются матрицей вида

$$a = \alpha^i\, a_i = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -(\, a'\,)^T \end{pmatrix}, \tag{3.4.114}$$

где $b' = (\, b'\,)^T$, $c' = (\, c'\,)^T$ – симметричные матрицы.

Как видно из (3.4.114), $Sp\; a = 0$ и, следовательно, с учетом (3.1.14)

$$det\, S = 1. \tag{3.4.115}$$

Из (3.4.114) легко определить число параметров группы $Sp(n)$. Матрица a' содержит $n'^{\,2}$ параметров, симметричные матрицы b' и c' содержат $(n'^{\,2} - n')/2 + n' = (n'^{\,2} + n')/2$ параметров каждая, следовательно, матрица (3.4.114) содержит $n'^{\,2} + 2(n'^{\,2} + n')/2 = 2n'^{\,2} + n'$ параметров. Таким образом, группа $Sp(n)$ имеет

$$p_{Sp(n)} = 2\, n'^{\,2} + n' \tag{3.4.116}$$

параметров, где $n' = n/2$.

Литература

[1] Барут, А. Теория представлений групп и её приложения / А. Барут, Р. Рончка. – М. : Мир, 1980. – Ч. 1. – 455 с.

[2] Барут, А. Теория представлений групп и её приложения / А. Барут, Р. Рончка. – М. : Мир, 1980. – Ч. 2. – 395 с.

[3] Желобенко, Д. П. Компактные группы Ли и их представления / Д. П. Желобенко. – М. : Наука, 1970. – 664 с.

[4] Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 519 с.

[5] Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. – М. : Мир, 1964. – 358 с.

[6] Наймарк, М. А. Теория представлений групп / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1976. – 560 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачи и упражнения

1. Убедитесь в справедливости равенств:

$$det\,(A^T) = det\,A,$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1},$$

$$Sp\,(AB) = Sp\,(BA),$$

$$Sp\,(ABC) = Sp\,(BCA),$$

где A, B, C – $n \times n$ - матрицы.

2. Проверьте, что матричная экспонента

$$T(t) = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \ldots \equiv e^{tA}$$

является решением дифференциального матричного уравнения

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\,A\,,$$

где A – независящая от параметра t матрица.

3. Докажите равенство

$$det\,(e^A) = e^{Sp\,A},$$

где A – произвольная $n \times n$ - матрица.

4. Найдите первые три члена ряда Кемпбелла–Хаусдорфа и представьте их в виде, приведенном в формуле (1.5.105). Используя этот результат, убедитесь с точностью до членов третьего порядка по элементам a и b в справедливости равенства (1.5.101).

5. Покажите, используя свойства матриц Паули τ_i, $i = 1, 2, 3$, что

$$U = e^{\frac{i}{2}\alpha^i \tau_i} = I\,\cos(\alpha/2) + i\,(n^i \tau_i)\,\sin(\alpha/2),$$

где α^i – вещественные параметры, $\alpha = \sqrt{\Sigma_i (\alpha^i)^2}$, $n^i = \alpha^i/\alpha$.

6. Покажите, решая 2×2 - матричное уравнение $\mathcal{U}^+\mathcal{U} = I$, что произвольная 2×2 - унитарная матрица может быть представлена в виде

$$\mathcal{U} = e^{i\,\varphi} \begin{pmatrix} \cos\theta\; e^{i\,\varphi_1} & \sin\theta\; e^{i\,\varphi_2} \\ -\sin\theta\; e^{-i\,\varphi_2} & \cos\theta\; e^{-i\,\varphi_1} \end{pmatrix},$$

где θ, φ, φ_1 и φ_2 – вещественные угол и фазы.

Пусть t_i, $i = 1, 2, ..., n^2 - 1$ – генераторы группы $SU(n)$.

7. Покажите, что из условия

$$Sp\,(\,t_i\,t_j\,) = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}$$

следует полная антисимметричность (симметричность) констант f (d) группы $SU(n)$.

8. Покажите, что

$$Sp\,(\,t_i\,t_j\,t_k) = \frac{1}{4}\,(if_{ij\,k} + d_{ij\,k}).$$

9. Найдите константу c_F в соотношении

$$\sum_i (\,t_i\,t_i\,)_{\alpha\beta} = c_F\,\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, ..., n$$

Ответ: $c_F = \dfrac{n^2 - 1}{2n}$.

10. Найдите константу c_A группы $SU(n)$ в соотношении

$$\sum_{kl} f_{ikl} f_{j\,kl} = c_A\,\delta_{ij},$$

Ответ: $c_A = n$.

11. Найдите константу D группы $SU(n)$ в соотношении

$$\sum_{kl} d_{ikl} d_{jkl} = D\,\delta_{ij},$$

Ответ: $D = \dfrac{n^2-4}{n}$.

12. Покажите, что

$$a) \quad \sum_{ij\,k} d_{ij\,k}(t_i t_j t_k)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,c_F D\,\delta_{\alpha\beta},$$

$$b) \quad \sum_{ij\,k} f_{ij\,k}(t_i t_j t_k)_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\,c_F\,c_A\,\delta_{\alpha\beta}.$$

13. Докажите, что

$$\sum_k d_{\,ik\,k} = 0.$$

14. Убедитесь в справедливости тождества

$$[\{A,B\},C] + [\{B,C,\}A] + [\{C,A\},B] = 0,$$

где $[A,B] = AB - BA, \quad \{A,B\} = AB + BA$.

15. Докажите тождество

$$\sum_m (d_{ij\,m} f_{mk\,l} + d_{j\,km} f_{m\,i\,l} + d_{kim} f_{mj\,l}) = 0.$$

16. Докажите соотношения:

$$a) \quad \sum_k t_k\,t_i\,t_k = -\frac{1}{2n}\,t_i,$$

$$b) \quad \sum_k t_k\,t_i\,t_j\,t_k = \frac{1}{4}\,\delta_{ij}\,I - \frac{1}{2n}\,t_i\,t_j.$$

Учебное издание

Смирнов Александр Дмитриевич

ВВЕДЕНИЕ

В ТЕОРИЮ ГРУПП ЛИ

Учебное пособие

Редактор, корректор М. Э. Левакова

Компьютерный набор и верстка автора

Подписано в печать 10.12.2014. Формат $60\times84/16$.

Усл. печ. л. 5,4. Уч.-изд. л. 5,0.

Тираж 50 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен

в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет.

150000, Ярославль, ул. Советская, 14.